CÁLCULO I (20-11-2024)	Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos Curso 2024–25	Hoja nº 4_b

Aplicación de teoremas sobre derivadas

1. Hállese un valor $c \in (1, e)$ tal que $\dfrac{f(e) - f(1)}{e - 1} = f'(c)$ para $f(x) = \ln x + 1$.

2. ¿Existe una función f diferenciable, con $f(1) = 4$, $f(5) = 7$ y $f'(x) \geq 1$ para todo x?

3. Use el teorema del valor medio de Lagrange para demostrar que $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$.

4. Usando primero el teorema de Bolzano y después el teorema de Rolle, demuestre que cada una de las ecuaciones

$$x^5 + 14x + 31 = 0 \qquad \text{y} \qquad 3x - 2 + \cos\frac{\pi}{2}x = 0$$

tiene exactamente una raíz real.

5. Calcule el número exacto de soluciones reales de cada una de las siguientes ecuaciones:

$$a)\ 2x - 1 = \operatorname{sen} x\,, \qquad b)\ x = \arctan x\,, \qquad c)\ (x+2)^{1/4} - x^{1/4} = 1\,.$$

Indicación: Por el Teorema de Rolle, si f' no se anula en un intervalo, entonces $f(x) = 0$ no puede tener dos soluciones en dicho intervalo. Recuerde también el Teorema de Bolzano.

6. Sea f es una función dos veces derivable tal que la ecuación $f(x) = 0$ tiene, al menos, tres soluciones en $[a, b]$. Usando el teorema de Rolle, pruebe que existe $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$.

7. Calcule los siguientes límites:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{tg} 8x}\,, \quad \text{(b)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos(6x))}{\ln(\cos(3x))}\,, \quad \text{(c)} \lim_{x\to 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}\,, \quad \text{(d)} \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 9}{e^x}\,.$$

8. Halle los siguientes límites:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x - 2\ln(1+x)}{x^2}\,, \quad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \big(1 + \operatorname{sen} x\big)^{1/x}\,, \quad \text{(c)} \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}\,,\ a, b > 0\,.$$

9. Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

10. El número de individuos de una población (en miles) viene dado por

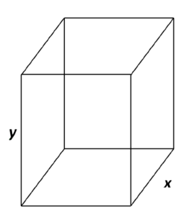
$$N(t) = 1 + (3-t)^2 e^{-t}, \ \text{con } t \geq 0, \qquad t = \text{ tiempo que transcurre (en años).}$$

¿Cuándo la población alcanza su valor máximo? ¿Cuál será la población a largo plazo?

11. Pruebe que, de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

12. Determine los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ que están *lo más cerca* posible del punto $P = (0, 2)$. (*Sugerencia:* Sitúe el punto P en el plano y esboce la curva $y = 4 - x^2$.)

13. Una empresa recibe el encargo de construir cajas con forma de paralelepípedo de modo que la base sea un cuadrado. El material que se usa para la base y la tapa superior tiene un coste de 2 euros por m^2, mientras que el material utilizado para las paredes laterales tiene un coste de 8 euros por m^2. Además, el volumen de las cajas debe ser 0.25 m^3. ¿Cuáles deben de ser las dimensiones de la caja para tener un coste mínimo?



14. Halle los intervalos de crecimiento/decrecimiento y de concavidad/convexidad de:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$; c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(2x) - x$.

15. Esboce la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{1/x}$, *b*) $f(x) = x \ln x$, *c*) $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

d) $f(x) = 4x + x^{\frac{7}{2}}$; *e*) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ -x^2 + 2x + 1, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$; *f*) $f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$,

Para ello, tendrá que determinar los valores en los que las funciones están definidas, son continuas, derivables, etc. Luego, con la información de f' y f'', determine intervalos de crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad, extremos locales (o relativos), puntos de inflexión, etc. Recuerde calcular, cuando sea necesario, los límites en los extremos de los dominios.

16. Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^2\, e^{-x}$.

17. Halle los polinomios de Taylor de grados 1 y 2 para $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 16$ y estime sin calculadora el error cometido al utilizarlos como aproximación de $\sqrt{16.2}$. Compruebe después, con ayuda de una calculadora, la precisión de dicha estimación. Con una estrategia similar, encuentre también aproximaciones sencillas de e y de $\ln 0.8$.

18. Calcule los polinomios de Taylor de grado 3 en $a = 0$ para las siguientes funciones

a) $f(x) = \ln(1 + \operatorname{sen} x)$, *b*) $f(x) = \dfrac{1}{3 + e^x}$, *c*) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$.