

**Series**

1. a) Para cada una de las series infinitas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{\log(n-1)}$$

escribe los cuatro primeros términos,  $a_n$ , y las cuatro primeras sumas parciales,  $S_n$ .

- b) Escribe la fórmula más sencilla posible del término  $n$ -ésimo,  $a_n$ , de las siguientes series:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{9}{10} + \dots, \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \dots$$

En ambos casos, calcula las sumas parciales,  $S_n$ , para  $1 \leq n \leq 5$ .

2. Escribiendo las sumas parciales como sumas telescópicas, decida la convergencia de las series correspondientes y, si procede, hállese su valor.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

3. Calcular la suma de cada una de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (4 \cdot (0, 1)^n + (-0, 7)^n), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \pi^{n/2} e^{-n},$$

justificando previamente su convergencia.

4. Utilizando el criterio del término general, comprueba que son divergentes las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2n^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin(n!)}{n}\right).$$

5. Decídase la convergencia de cada una de las siguientes series positivas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2013}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{20n - 13}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - 1}{2013n^2 + 2014},$$

dando por hecho que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge si y sólo si  $p > 1$ .

6. Estudiar si las series siguientes son convergentes o no:

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n2^n}, & b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n, & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 6}{n^3 + 1}, & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \\ e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{n^3}, & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}, & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(n+2)}{n^{3/2}}, & h) \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} - 3} \end{array}$$

7. Estudiar para qué valores del parámetro  $\alpha$  son convergentes las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(n+1)}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^2 + 1}.$$

8. Compruebe si las siguientes series convergen (absoluta o condicionalmente) o divergen:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + n - 6}{n^4 + 1}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n^2), \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

9. Lo mismo para las series

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad b) \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}}, \quad c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}.$$

10. Sea  $(a_n)$  una sucesión de términos positivos tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L > 1$ . Pruebe que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_n}$$

es convergente.

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (dando una pequeña explicación) o falsas (dando un contraejemplo):

a) Si  $a_n > 0$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  converge.

b) Si  $a_n > 0$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  diverge.

c) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  converge. (Obsérvese que aquí no se pide que  $a_n > 0$ .)

d) Si  $a_n > 0$  y  $a_n$  es monótona y no está acotada entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-n}$  converge.

e) Si  $a_n > 0$  entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2a_n + 1}\right)^n$  converge.

12. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

|                                                                       |                                                                                                                                                        |                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!}$                                 | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}$                                                                                                                  | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$                   |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log k)^2}{k}$                            | $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots$ | $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k$       |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$                          | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + \sqrt{k}}{k^3 + 2\sqrt{k}}$                                                                                            | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^{4k}}$                 |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^k + 1}$                             | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$                                                                                                                | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{\frac{1}{2}}}$ |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^{\frac{3}{2}}}$ | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$                                                                                                             | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{45}{1 + 100^{-n}}$            |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$                              | $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$                                                                                                          | $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$                |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}}$                            |                                                                                                                                                        |                                                          |