CÁLCULO I (2-10-2024)	Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos Curso 2024–25	Hoja n^0 2_a

Sucesiones

1. Escriba los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

$$a_n = (-1)^n + 2\,, \qquad b_n = 2^{-n+1}\,, \qquad c_k = \frac{k-1}{k+1}\,.$$

2. Halle la fórmula para a_n, sabiendo que los primeros términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ son:

(a) $1, 4, 9, 16, 25, 36\,;$ (b) $1, 3, 1, 3, 1, 3\,;$ (c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}\,;$ (d) $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}\,.$

3. ¿Cuáles de las sucesiones cuyos términos generales vienen escritos más abajo son convergentes? Explique la respuesta usando la definición.

$$a_n = \frac{1}{2^n}\,; \qquad b_n = \sqrt{n}\,; \qquad c_n = 3 + (-1)^n\,.$$

4. Compruebe que las siguientes sucesiones divergen. Estudie si tienden a $+\infty$ o $-\infty$, o si son "alternadas".

$$a_n = \frac{n^3}{10n^2 + 2009}\,; \qquad b_n = -n^2\,; \qquad c_n = \frac{1 + (-1)^n}{3 - (-1)^n}\,; \qquad d_n = (-2)^n\,.$$

5. Calcule los siguientes límites y explique la respuesta:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}2011^n\,;$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-5)^n}{12^{n+1}}\,;$ (c) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k;$ (d) $\lim\limits_{k\to\infty} e^{1/(k+1)}\,.$

6. Aplicando lema del sandwich, deduzca la existencia y halle el valor de los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\,;$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cos(3n) + 5\,\mathrm{sen}(n^2)}{n+1}\,;$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 2^{-n} + \cos(n!)}{\sqrt{n}}\,.$

7. Estudie si los términos generales que se indican dan lugar a sucesiones convergentes y, en caso afirmativo, halle su límite.

a) $a_n = \dfrac{3n^4 - 2}{n^4 + 2n^2 + 2}$, *b)* $a_n = \dfrac{8n^2 - 7n}{2n^3 + 5}$ *c)* $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$,

d) $a_n = n\sqrt{n^2+1} - n^2$, *e)* $a_n = \dfrac{4^n}{5^n + 6^n}$, *f)* $a_n = \dfrac{6^n}{5^n + (-6)^n}$,

8. Determine los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{3}{2}} + \pi^{-1/n}\right)$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{e} + e^{-n}\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n}$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$

(Sugerencia: para los tres últimos, conviene recordar que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$).

9. En cada apartado, dé un ejemplo de una sucesión que tenga las propiedades que se afirman:

a) La sucesión $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y acotada, pero $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge.

b) La sucesión $\{b_{n+1}/b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, pero $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge.

10. Sean a_n y b_n dos sucesiones acotadas superiormente y A y B sus respectivos supremos. Consideremos también $c_n = a_n + b_n$ y llamemos C a su supremo.

a) ¿Se cumple siempre $A + B \geq C$?

b) ¿Se cumple $A + B = C$ si a_n y b_n son crecientes?

c) ¿Se cumple siempre $A + B = C$?

11. Consideremos la sucesión definida por $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ para cada $n \geq 1$, con $a_1 = 1$.

a) Pruebe por inducción que $a_n < 2$ para todo n.

b) Justifique que la sucesión (a_n) es monótona creciente y halle su límite.

c) Una forma alternativa de resolver los apartados anteriores es calcular una fórmula exacta para a_n. Intente hallarla.

(Este ejercicio da sentido a la expresión $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}$, que formalmente es el resultado de iterar indefinidamente la sucesión antes indicada, y por tanto se le debe asignar el valor de su límite.)

12. Fijado $1 < t \leq 4$, consideramos la sucesión recurrente dada por

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{t}{x_n}\Big) \quad \text{para } n \geq 1.$$

a) Pruebe que esta sucesión está acotada inferiormente por $\sqrt{t}$ y superiormente por 2.
Indicación: $(a+b)^2 \geq 4ab$ para $a, b \geq 0$.

b) Demuestre que es monótona decreciente. Deduzca que $\lim x_n = \sqrt{t}$.

13. Considere la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_n = \frac{3}{2}\,a_{n-1} - \frac{1}{2}\,a_{n-2} \quad \text{para cada } n \geq 2.$$

a) Pruebe que la sucesión es creciente.

b) El apartado anterior nos dice que $a_n \geq 2$ si $n \geq 3$. Compruebe numéricamente que $a_n < 3$ para muchos valores iniciales de n y que, de hecho, 3 "parece" ser el límite de la sucesión. ¿Es fácil probar ese hecho por inducción?

b) Observe cómo se simplifica todo si nos dicen que el término general de la sucesión se puede escribir como $a_n = 3 - 1/2^{n-1}$. Compruebe primero que es así y calcule luego el límite de la sucesión.