CÁLCULO I (16-9-2024)	**Grado en Ciencia e Ingeniería de Datos** **Curso 2024–25**	**Hoja n^0 1**

Inducción. Números reales.

1.- Demostrar por inducción:

(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

(c) $\forall\, n \geq 10$, $2^n \geq n^3$.

(d) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$.

(e) $4(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n) + 1 = 5^{n+1}$.

(f) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$.

(g) Si n no es múltiplo de 4 la suma $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es múltiplo de 10.
(Comprobarlo para $n = 1, 2, 3$ y demostrar que si es cierto para n, lo es para $n + 4$.)

(h) $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1)\,(n-1)! = n!$ para $n \geq 2$.

2.- Demostrar la desigualdad de Bernoulli

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad \text{para } x \geq -1.$$

3.- Sean a, b dos números no negativos, con $a \leq b$. Demostrar que

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

4.- Indique los valores $x \in \mathbb{R}$ para los que se satisfacen las siguientes *igualdades*:

a) $x^2 - 9x + 20 = 0$,

b) $x^2 + 2x = 1$,

c) $x^4 - 4 = 0$,

d) $\sqrt[3]{1 + x} = 2$,

e) $-1 + \operatorname{sen} x = 0$,

f) $-1 + \log \frac{x}{e} = 0$.

5.- Encuentre todos los valores $x \in \mathbb{R}$ que satisfagan las siguientes *desigualdades*:

a) $|4x + 3| \leq 1$,

b) $|x + 1| \leq |x - 1|$,

c) $|x^2 - 5x + 6| < 2$,

d) $|x + 1| + |x + 3| < 5$,

e) $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} > 0$,

f) $\frac{x^2-2}{x^2-4} \leq 0$,

g) $\frac{x^2+4}{x^2-2x} > 0$,

h) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} < 1$.

6.- Indicar en la recta real todos los valores de x que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $|x+1| > 3$,

(b) $|2x+1| < 1$,

(c) $|x-1| \leq |x+1|$,

(d) $x^2 - 4x + 6 < x$,

(e) $|x^2 - 3| \leq 1$,

(f) $\frac{x^2}{x^2-4} < 0$,

(g) $\frac{x-1}{x+2} > 0$,

(h) $|(x-2)(x-3)| < 1$,

(i) $|x-1| + |x-2| > 1$,

(j) $\frac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1$.

7.- Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

(a) $A = \{x \mid x^2 < 4\}$,

(b) $B = \{x \mid x^2 \geq 4\}$,

(c) $C = \{x \mid 2 < x^2 \leq 4\}$,

(d) $D = \{\frac{n-1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$,

(e) $E = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(f) $F = E \cup \{0\}$,

(g) $G = \{\frac{1}{n} - (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(h) $H = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0,\ x^2 \leq 3\}$.

8.- Si el conjunto A tiene supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A = \{-x : x \in A\}$?

9.- Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\text{ínf}\, B$, y que además, $\sup A \leq \text{ínf}\, B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

10.- ¿Dónde está el fallo en los siguientes razonamientos?

(a) Sea $x = y$, entonces $x^2 = x\,y$ y $x^2 - y^2 = x\,y - y^2$. Así, $(x+y)\,(x-y) = y\,(x-y)$, es decir, $x + y = y$. De aquí se sigue que $2y = y$ y por lo tanto $2 = 1$. **¡Contradicción!**

(b) Vamos a hallar los x que verifican
$$\frac{x+1}{x-1} \geq 1.$$
Esta desigualdad es equivalente a $x + 1 \geq x - 1$, o lo que es lo mismo $1 \geq -1$. Como esto es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que el conjunto de valores que verifican la desigualdad anterior es $\mathbb{R}$. De esta forma, tomando en particular $x = -1$ obtenemos
$$0 = \frac{-1+1}{-1-1} \geq 1. \qquad \textbf{¡Contradicción!}$$