ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática
Curso 2024–25

Examen
16/6/2025

APELLIDOS:____

NOMBRE:____________________________

GRUPO
111

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**FINAL**
10	10	10	10	10	10	10	70

Razonar debidamente las respuestas

Escribe cada ejercicio en una página/hoja

---

1. Se considera la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Calcula $f([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.
b) Calcula $f^{-1}((0, \frac{1}{2}])$.
c) Halla $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}$.

---

2. Sea $P = \{2, 3, 5, \dots\}$ el conjunto de números primos y se considera la relación en $\mathcal{R}$ en $P \times P$:

$$(n_1, n_2)\mathcal{R}(m_1, m_2) \iff n_1 n_2 = m_1 m_2.$$

a) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relacioón de equivalencia.
b) Describe por extensión la clase de equivalencia $[(a, a)]$ para $a \in P$.
c) Describe por extensión la clase de equivalencia $[(a, b)]$ para $a, b \in P$ con $a \neq b$.

---

3. Decide razonadamente si es cierta la siguiente afirmación. Si $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ cumplen $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$ y $\mathrm{mcd}(b, c) = 1$ entonces $\mathrm{mcd}(a, c) = 1$.

---

4. Calcula las soluciones enteras de la ecuación $33x + 20y = 3$ con $-33 < y < -1$.

---

5. Decide razonadamente si es cierta la siguiente afirmación. Si U y V son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 entonces $U \cap V \neq \{(0, 0, 0)\}$.

(continúa en la siguiente página)

6. Se considera la aplicación

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (y - x, 0, 0) + x(1, 1, 1) - y(0, 0, 1),$$

a) Demuestra que f es una aplicación lineal.

b) Calcula la matriz de f con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

c) Calcula una base de $\mathrm{Im}(f)$.

d) Sea $U = \langle (1, 1, 0), (2, 1, -1) \rangle$. Describe $U + \mathrm{Im}(f)$ como el conjunto de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones, con el menor número de ecuaciones posible.

---

7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

calcula una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que $A = PDP^{-1}$.