ÁLGEBRA	**Grado en Ingeniería Informática** **Curso 2024–25**	**Examen** **20/12/2024**

APELLIDOS, NOMBRE: ____________________

GRUPO **111**

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**FINAL**
10	15	18	10	12	20	75

Razonar debidamente las respuestas

Escribe cada ejercicio en una hoja

---

1. Discute y resuelve, según los valores de los parámetros $a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones lineales representado por la siguiente matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array}\right).$$

---

2. Se considera el subespacio U de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1,-1,0,1),(2,-1,1,1)\}$.

(a) Demuestra que $\mathcal{B} = \{(1,-1,0,1),(2,-1,1,1)\}$ es una base de U.

(b) Calcula a para que el vector $\vec{u} = (2, a, 3, -1)$ pertenezca a U.

(c) Para el valor de a encontrado en el apartado (b), calcula las coordenadas de $\vec{u}$ con respecto de la base $\mathcal{B}$ de U.

---

3. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Halla $f(1,-1,1)$.

(b) Halla $f^{-1}(\{(2,1,2,1)\})$.

(c) Halla una base del núcleo de f.

(d) Halla una base de la imagen de f.

(e) Comprueba que se cumple el Teorema de la dimensión.

(continúa en la siguiente página)

4. Explica si el conjunto

$$V = \{(t,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{Z}\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

---

5. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$W_1 : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad W_2 = \langle (1,-1,0,1), (2,1,1,1) \rangle .$$

(a) Calcula la dimensión de $W_1 \cap W_2$.

(b) Calcula unas ecuaciones de $W_1 + W_2$.

(c) Comprueba que se satisface la fórmula de Grassmann.

---

6. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sabiendo que los autovalores de A son 1 y -2 (no hace falta que lo demuestres), calcula los subespacios de autovectores asociados.

(b) Razona si A es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentra una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$.
