ÁLGEBRA (12-12-2024) | **Grado en Ingeniería Informática** **Curso 2024–25** | **Hoja n^o 8**

Matrices simétricas. Valores y vectores propios. Diagonalización

1. Hallar los autovalores reales y los autovectores de $\mathbb{R}^n$ de las siguientes matrices:

$$a)\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad f)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad h)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad i)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, en los casos en los que sea posible, hallar una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores.

2. Encontrar los autovalores y los autovectores de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ dadas por las siguientes matrices:

$$a)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Diagonalizar las siguientes matrices en los casos que sea posible:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Diagonalizar si es posible las siguientes matrices A y C calculando matrices de paso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Dada $A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcular A^{1438} y $\lim_{n\longrightarrow\infty} A^n$.

6. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, calcular A^{2016}.

7. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & f & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Determinar los valores propios de A.

   b) Discutir las condiciones que deben cumplir a, b, c, d, e, f para que A sea diagonalizable.

   c) En las condiciones para las que A es diagonalizable, obtener los subespacios propios asociados a los dos valores propios existentes.

   d) Calcular la matriz de paso a forma diagonal.

8. Demostrar o dar un contraejemplo para decidir la veracidad de las siguientes afirmaciones.

   a) Toda matriz invertible es diagonalizable.

   b) Si A es diagonalizable, entonces A^n es diagonalizable para $n \in \mathbb{N}$.

   c) Si A y B son diagonalizables, entonces $A + B$ y AB son diagonalizables.

9. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ la matriz $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable en $\mathbb{R}$.

10. Estudiar para qué valores de c la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-c \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

11. Encontrar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

12. Sea $f \in End(\mathbb{R}^3)$ que verifica:

    a) $f(1,1,1) = (0,0,0)$ y

    b) 2 y 3 son valores propios de f.

    ¿Es f diagonalizable?