Matrices y Determinantes.

1. Calcula A^2, A^3, A^4 para

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Generaliza el resultado calculando A^n para $n \in \mathbb{N}$.
(*Sugerencia*: intenta inferir el posible valor de A^n y demuéstralo por inducción).

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para los que se cumple la igualdad $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = 0$, donde I_2 y 0 son respectivamente la matriz identidad y matriz nula, de orden dos.

3. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ se llama *idempotente* si $A^2 = A$. Demuestra lo siguiente:
a) La matriz $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente.
b) Si A es idempotente, entonces $I_n - A$ es idempotente (I_n es la matriz identidad de orden n).
c) Si A es idempotente, entonces $(I_n - A)A = A(I_n - A) = 0$.
d) Si A es idempotente e invertible entonces A es la matriz identidad.

4. Se dice que dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *conmutan* si $AB = BA$. Encuentra todas las matrices que conmutan respectivamente con:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Sean A y B dos matrices cuadradas. Decide de manera razonada si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

$$(AB)^2 = A^2B^2, \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \qquad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

¿Qué ocurre con las anteriores igualdades si A y B conmutan?

6. Encuentra, si existen, dos matrices con coeficientes racionales A y B, de tamaño adecuado, que resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 3A - 2B & = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\[2ex] 2A + B & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

7. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ y el polinomio $p(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$. Demostrar que se tiene $p(A) = 0$. Es decir, $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0 \in M_2(\mathbb{K})$.

8. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La suma de matrices simétricas es una matriz simétrica.

b) El producto de matrices simétricas es una matriz simétrica.

9. Sean

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que E_i, $i = 1, 2, 3$, es una matriz elemental indicando la transformación t_i elemental que se ha aplicado a I_3.

Efectúa los productos $E_iA, i = 1, 2, 3$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Comprueba que realizar la transformación elemental t_i en la matriz A es lo mismo que multiplicar E_i por A.

10. Halla la forma escalonada reducida de cada una de las matrices. ¿Qué rango tienen estas matrices?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 2/3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & -6 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -6 & -4 & 7 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Decide si las siguientes matrices son invertibles, y si lo son, halla su inversa utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 9 & 2 & -1 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Calcula los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

Solución: a) 63; b) 0; c) $(x-a)^3(3a+x)$; d) 5.

13. Halla los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ que sean soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{e)} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -2 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

14. Determina el rango de las matrices del ejercicio **10** mediante el método del orlado.

15. Calcula la inversa de las matrices del ejercicio **11** mediante la fórmula usando determinantes y adjuntos.