ÁLGEBRA (18-10-2024)	**Grado en Ingeniería Informática** **Curso 2024–25**	**Hoja nº 4**

Congruencias

1. Demuestra que 13 y 15 son invertibles módulo 23 y 31. Determina los inversos de $\overline{13}$ y de $-\overline{15}$ en $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

2. Para $n = 7$ y 8. Determina $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ e indica cuál es el inverso de cada uno de sus elementos.

3. Criterios de divisibilidad: Sea $n \in \mathbb{N}$.

   a) Demuestra que n es divisible por 7 si y sólo si al quitar la cifra correspondiente a las unidades y restarle dicha cifra multiplicada por 2 se obtiene un múltiplo de 7. Ejemplo para un número de cuatro cifras: $a_3\,a_2\,a_1\,a_0$ es divisible por 7 si y sólo si $a_3\,a_2\,a_1 - 2a_0$ es múltiplo de 7.

   b) Demuestra que n es divisible por 13 si y sólo si al quitar la cifra correspondiente a las unidades y restarle dicha cifra multiplicada por 9 se obtiene un múltiplo de 13. Ejemplo para un número de cuatro cifras: $a_3\,a_2\,a_1\,a_0$ es divisible por 13 si y sólo si $a_3\,a_2\,a_1 - 9a_0$ es múltiplo de 13.

   c) Demuestra que n es divisible por 17 si y sólo si al quitar la cifra correspondiente a las unidades y restarle dicha cifra multiplicada por 5 se obtiene un múltiplo de 17. Ejemplo para un número de cuatro cifras: $a_3\,a_2\,a_1\,a_0$ es divisible por 17 si y sólo si $a_3\,a_2\,a_1 - 5a_0$ es múltiplo de 17.

   d) Demuestra que n es divisible por 19 si y sólo si al quitar la cifra correspondiente a las unidades y sumarle dicha cifra multiplicada por 2 se obtiene un múltiplo de 19. Ejemplo para un número de cuatro cifras: $a_3\,a_2\,a_1\,a_0$ es divisible por 19 si y sólo si $a_3\,a_2\,a_1 + 2a_0$ es múltiplo de 19.

   e) Demuestra que n es divisible por 23 si y sólo si al quitar la cifra correspondiente a las unidades y sumarle dicha cifra multiplicada por 7 se obtiene un múltiplo de 23. Ejemplo para un número de cuatro cifras: $a_3\,a_2\,a_1\,a_0$ es divisible por 23 si y sólo si $a_3\,a_2\,a_1 + 7a_0$ es múltiplo de 23.

4. Dados m enteros consecutivos: $n, n+1, n+2, \ldots, n+(m-1)$, con $m > 1$, demuestra que uno y solamente uno es divisible por m.

5. Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo.

   a) Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq p-1$. Demuestra que p divide al número combinatorio $\binom{p}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

   b) Demuestra $a^p + b^p \equiv (a+b)^p \pmod{p}$.

   c) ¿Es cierto alguno de los apartados anteriores si p no es primo?

6. Halla todas las soluciones de las ecuaciones siguientes o indica por qué no existe solución.

   a) $\overline{13}x = \overline{2}$ en $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$.

   b) $\overline{16}x = \overline{7}$ en $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$.

   c) $6x \equiv -10 \pmod{26}$.

   d) $15x \equiv 10 \pmod{20}$.

7. Para $n = 101$ y 9630 determina el cardinal de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

8. Calcula el resto de dividir 6^{234} entre 13.

9. Calcula $15^{2098} \pmod{14}$.

10. Determina si $15002^{8003} + 11^8$ es divisible por 15.

11. Demuestra que el entero $5^{31} - 5$ es múltiplo de 7.

12. Demuestra que el entero $13^{232} - 15$ es múltiplo de 11.

13. Demuestra que 14 divide a $9(3^{611} - 5^{25})$.