ÁLGEBRA (7-10-2024)	**Grado en Ingeniería Informática** **Curso 2024–25**	**Hoja nº 3**

Aritmética de enteros

1. Calcular los siguientes máximos comunes divisores:

$$\mathrm{mcd}(798, 1911) \qquad \mathrm{mcd}(1848, 5940) \qquad \mathrm{mcd}(36291, 4562)$$
$$\mathrm{mcd}(36299, 1722) \qquad \mathrm{mcd}(2717, 1938) \qquad \mathrm{mcd}(21168, 3564)$$

2. Sea $d = \mathrm{mcd}(a, b)$. Demuestra que $\mathrm{mcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

3. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ no simultáneamente cero, definimos $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ como $f(x, y) = ax + by$. Demuestra que $\mathrm{Im}(f) = d\mathbb{Z} = \{dm \mid m \in \mathbb{Z}\}$, donde $d = \mathrm{mcd}(a, b)$.

4. Encontrar las parejas $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathrm{mcd}(a, b) = 10$ y $\mathrm{mcm}(a, b) = 100$.

5. Demuestra que la ecuación $6x + 20y = 7$ no tiene soluciones enteras.
¿Qué puedes decir de $25x + 45y = 3$?

6. Hallar el conjunto de soluciones enteras de las siguientes ecuaciones:
a) $111x + 36y = 15$, b) $10x + 26y = 1224$ c) $6x + 10y = 20$.

7. Hallar las soluciones positivas de las siguientes ecuaciones diofánticas:
a) $17x + 32y = 1210$, b) $29x + 35y = 3942$.

8. Hallar las soluciones enteras de $11x - 13y = 1$ que satifagan $\max\{|x|, |y|\} < 13$.

9. Calcular dos números naturales múltiplos de 12 y 15 respectivamente y su suma es 81.

10. Venus, la Tierra y Marte tardan 225, 365 y 687 días respectivamente en girar alrededor del Sol. ¿Cada cuánto tiempo están en la misma posición que hoy?

11. Demuestra que todo número entero se puede expresar como la suma de un múltiplo de 1001 más un múltiplo de 30.

12. El laboratorio se ha gastado 50340 euros en ordenadores IBM y HP. Si los ordenadores IBM cuestan a 1500 euros cada uno y los HP a 1080 euros, ¿cuántos se han comprado de cada marca?

13. Un grupo de amigos decide ir al cine. La película en la Sala 1 cuesta 11 euros, y la película en la Sala 2 cuesta 13 euros. Indica cuántos amigos fueron al cine sabiendo que en total se gastaron 150 euros.

14. En Madrid tocan TzeTze y simultáneamente en las afueras VG. Una pandilla de amigos se divide entre los dos conciertos. La entrada para TzeTze cuesta $31,80$ euros y para VG, 15 euros. Si se han gastado en total $600,60$ euros, ¿cuántos amigos formaban la pandilla?

15. Decimos que un punto de coordenadas enteras $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ es visible desde el origen si el segmento que une dicho punto con el origen no pasa por ningún otro punto. ¿Cuánto vale $mcd(x, y)$ si (x, y) es un punto visible? ¿Cuántos puntos impiden "ver" el punto $(42, 45)$?

16. Sabemos que dados dos enteros no nulos a y b, existen primos $p_1, \ldots, p_s$ de modo que

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \quad \text{y} \quad b = \pm p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s} \qquad \text{con } \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

a) Expresar $\mathrm{mcd}(a, b)$ y $\mathrm{mcm}(a, b)$ en función de estas factorizaciones.

b) Utilizar el algoritmo de a) y el algoritmo de Euclides para calcular

$$\mathrm{mcd}(1547, 3059) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{mcd}(365, 55).$$

17. Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ es la descomposición en factores primos de $n \in \mathbb{N}$. ¿Cuántos divisores positivos tiene n?

18. Sean a, b, m números naturales con a y b primos entre sí. Demuestra que si $a|m$ y $b|m$ entonces $ab|m$. Encuentra un contraejemplo que muestre que si a y b no son primos entre sí el resultado no es cierto en general.

19. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

20. Sea $n \in \mathbb{N}$ y denotemos $M_n = 2^n - 1$. Demostrar que una condición necesaria para que M_n sea primo es que $n = p$ para algún p primo.
(Sugerencia: $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$.

21. Sea $n \in \mathbb{N}$ y denotemos $F_n = 2^n + 1$. Demostrar que una condición necesaria para que F_n sea primo es que $n = 2^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.
(Sugerencia: Si n es impar, $x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots - x + 1)$.