

### Relaciones de equivalencia

1. Considerar la relación sobre  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  definida por:

$$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \iff m \cdot n' = m' \cdot n.$$

- (a) Probar que es una relación de equivalencia.  
(b) ¿Puedes describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente?
2. Consideramos ahora la relación sobre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  definida por:

$$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \iff m \cdot n' = m' \cdot n.$$

¿Es esta relación de equivalencia?

3. En el conjunto  $\mathbb{R}$  se define la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor,$$

donde  $\lfloor z \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq z\}$  (la parte entera de  $z$ ). Demuestra que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia y halla el conjunto cociente.

4. En el conjunto de rectas **no verticales** del plano  $\mathbb{R}^2$  se considera la siguiente relación:

$$r_1\mathcal{R}r_2 \iff r_1 = r_2 \quad \text{ó} \quad r_1 \text{ es paralela a } r_2.$$

- (a) Comprueba que es una relación de equivalencia.  
(b) Halla la clase de equivalencia de la recta  $2x + 3y - 1 = 0$ .  
(c) Describe el conjunto cociente hallando un conjunto  $X$  de números y una biyección  $g : \mathbb{R}^2/R \rightarrow X$ .
5. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^2$ . Se considera la siguiente relación en  $\mathbb{R}$ :

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

Demostrar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia. Obtener el conjunto cociente.

6. Sean  $X$  e  $Y$  conjuntos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Se considera la siguiente relación en  $X$ :

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

- (a) Demuestra que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia en  $X$ .  
(b) Obtén el conjunto cociente.  
(c) ¿Qué es el conjunto cociente si  $f$  es una biyección?
7. Sea  $A$  un conjunto y  $B$  un subconjunto no vacío de  $A$ . En el conjunto  $\mathcal{P}(A)$  se considera las siguientes relaciones:

- $X\mathcal{R}_1Y \iff X \cap B = Y \cap B.$
- $X\mathcal{R}_2Y \iff X \cup B = Y \cup B.$
- $X\mathcal{R}_3Y \iff X \setminus B = Y \setminus B.$

Estudia si son relaciones de equivalencia y, en caso afirmativo, describe los conjuntos cocientes.