TEORÍA DE GALOIS

Grado en Matemáticas
Curso 2023–24

Examen
12-1-2024

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

1a	1b	2a	2b	3
10	10	3	7	10

4a	4b	4c	4d	4e
4	4	4	4	4

4f	4g	4h	4i
4	4	4	8

FINAL

/80

Razonar debidamente las respuestas

Tiempo: 3 horas

---

1. Decide razonadamente si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Recuerda que si son verdaderas tiene que dar una demostración y si son falsas un contraejemplo.

a) Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ mónico irreducible de grado 3 y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \overline{\mathbb{Q}}$ sus raíces. Si $\mathrm{Gal}(f) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\alpha_1^n - \alpha_2^n)(\alpha_2^n - \alpha_3^n)(\alpha_3^n - \alpha_1^n) \notin \mathbb{Q}$.

b) Existe una extensión $K/\mathbb{Q}$ que no es de Galois tal que $[K : \mathbb{Q}] = 6$ y $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

---

2. Sea $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \overline{\mathbb{Q}}$ sus raíces. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $\delta_n = (\alpha_1^n - \alpha_2^n)(\alpha_1^n - \alpha_3^n)(\alpha_2^n - \alpha_3^n)$.

a) Demostrar que $\delta_n \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}\, i)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Encontrar una función $t : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\delta_n = t(n)\sqrt{3}\, i$.

---

3. Se considera el polinomio $f(x) = x^{12} - 5$ y L un cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$. Demuestra que existe una cadena de extensiones $\mathbb{Q} = L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots \subseteq L_n = L$, tal que L_{i+1}/L_i es de Galois y de orden primo, para $i = 0, \ldots, n-1$.
(No hace falta ser completamente riguroso en la demostración de los grados de las extensiones)

---

4. Sea $f(x) = x^6 + x^3 + 1$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $f(\alpha) = 0$ y L un cuerpo de descomposición de $f \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Calcular las raíces de $f(x)$ en $\mathbb{C}$.

b) Factorizar $f(x)$ en $\mathbb{R}[x]$.

c) Demostrar que $f(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

d) Demuestra $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

e) Demuestra $\sqrt{-3} \in L$.

f) Calcular $[L : \mathbb{Q}]$.

g) Describir los $\mathbb{Q}$-automorfismos de L.

h) Determina la clase de isomorfía de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

i) Determina si existen $\alpha, \beta \in L$ tales que $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, donde $p_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)$, $p_{\beta/\mathbb{Q}}(x)$ cumplen

$$\mathrm{grado}(p_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)) = 2 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{grado}(p_{\beta/\mathbb{Q}}(x)) = 3.$$

En caso afirmativo calcular $p_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)$, $p_{\beta/\mathbb{Q}}(x)$.