TEORÍA DE GALOIS

Grado en Matemáticas
Curso 2023–24

Examen
29-11-2023

APELLIDOS, NOMBRE: ______________________________

1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d
5	5	5	5	5	5	5

3a	3b	3c	3d	3e	3f
5	5	5	5	5	5

3g	3h	3i	3j	3k	3l
5	5	5	5	5	10

FINAL

/100

Razonar debidamente las respuestas

Tiempo: 2 horas

---

1. Decide razonadamente si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Recuerda que si son verdaderas tiene que dar una demostración y si son falsas un contraejemplo.

a) Existe un isomorfismo entre los cuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ y $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$

b) El cuerpo de descomposición de un polinomio de grado n está generado por $n-1$ de sus raíces.

c) $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$, donde $\alpha^4 = -1$.

---

2. Sea $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, K su cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

a) Demostrar que $f(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

b) Demostrar que si $\beta = 1/(1-\alpha)$, entonces $f(\beta) = 0$.

c) Calcular $[K : \mathbb{Q}]$ y $\delta \in K$ tal que $K = \mathbb{Q}(\delta)$.

d) Expresar las raíces de $f(x)$ como potencias del elemento δ calculada en el apartado anterior.

---

3. Sea $f(x) = x^8 - x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ y L su cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$.

a) Calcular las raíces de $f(x)$ en $\mathbb{C}$.

b) Factorizar $f(x)$ en $\mathbb{R}[x]$.

c) Demostrar $L = \mathbb{Q}(\zeta_{24})$, donde $\zeta_{24} := e^{2\pi i/24}$.

d) Demostrar $\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{3} \in L$.

e) Demostrar $[L : \mathbb{Q}] = 8$.

f) Demostrar que $f(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

g) Describir los $\mathbb{Q}$-automorfismos de L.

h) Calcular los ordenes de los elementos de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$

i) Demostrar que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ es abeliano.

j) Calcular los subgrupos de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

k) Para cada divisor d de 8 calcular cuántos cuerpos intermedios tiene $L/\mathbb{Q}$ de grado d.

l) Encontrar generadores de los cuerpos intermedios de $L/\mathbb{Q}$