TEORÍA DE GALOIS (15-12-2023)	Grado en Matemáticas Curso 2023–24	Hoja nº 5

Resolubilidad por radicales.

1. Sea $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Determina una cadena de extensiones de cuerpos que demuestre que $f(x) = 0$ es resoluble por radicales.

2. Demuestra que existe una cadena de extensiones $\mathbb{Q} \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[12]{5})$, tal que $K_{k+1} = K_k(\alpha_k)$ con $\alpha_k^{p_k} \in K_k$ y p_k primo, $k = 1, \ldots, m$.

3. Demuestra que la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt[3]{3}i)/\mathbb{Q}$ es radical.

4. Encuentra tres extensiones radicales de $\mathbb{Q}$, todas conteniendo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, con grupos de Galois distintos.

5. Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ y L un cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$.

a) Demuestra que $|L : \mathbb{Q}| = 3$ y halla una extensión radical de $\mathbb{Q}$ que contiene a L.

b) Demuestra que $L/\mathbb{Q}$ no es radical.

6. Sea K un cuerpo de característica 0. Demuestra que el polinomio $x^4 + bx^2 + c \in K[x]$ es resoluble por radicales sobre K.

7. Decide si toda extensión radical L/K es

a) normal.

b) separable.

8. Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 5 . Demuestra que si $f(x)$ es resoluble por radicales,

a) entonces $|\mathrm{Gal}(f)| \leq 24$.

b) Si además $f(x)$ es irreducible, entonces $|\mathrm{Gal}(f)| \leq 20$.

9. Sea L un cuerpo de descomposición del polinomio $f(x) = x^6 + ax^3 + b \in \mathbb{Q}[x]$. Demuestra que $L/\mathbb{Q}$ es una extensión radical para cualquier par de valores $a, b \in \mathbb{Q}$. Concluye que $f(x)$ es resoluble por radicales.

10. Sean $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ dos polinomios resolubles por radicales. ¿Se puede asegurar que también $f + g$ es resoluble por radicales?

11. Estudiar si los siguientes polinomios son resoluble por radicales sobre $\mathbb{Q}$:

a) $f_1(x) = x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 3$,

b) $f_2(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$,

c) $f_3(x) = x^5 - 5x^4 + 5$,

d) $f_4(x) = x^5 - 6x + 3$.

12. Sean K un cuerpo de característica 0 y $a, b, c, d \in K$ y consideramos el polinomio

$$f(x) = x^8 + ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1.$$

¿Es resoluble $f(x)$ por radicales sobre K?