TEORÍA DE GALOIS (9-11-2023)	**Grado en Matemáticas** **Curso 2023–24**	**Hoja nº 3**

Teorema Fundamental de la Teoría de Galois.

1. Si L/K es de Galois con $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ y $\alpha \in L$, demuestra que $\displaystyle\sum_{\sigma\in G} \sigma(\alpha) \in K$.

2. Para cada uno de los cuerpos de descomposición de los siguientes polinomios sobre $\mathbb{Q}$:

$$x^{12} - 1, \quad x^6 + 1, \quad x^4 - 2, \quad x^4 + 4x^2 + 2,$$

calcula:

a) su grupo de Galois,

b) el retículo de subgrupos,

c) el retículo de subcuerpos.

3. Demuestra que la extensión $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(t^3)$ es de Galois. Calcula su grupo de Galois.

4. Sea $f(x) = (x^3 - 2)(x^2 - 3) \in \mathbb{Q}[x]$ y L el cuerpo de descomposición de $f(x)$.

a) Calcula L.

b) Demuestra que $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq L$.

c) Calcula el grado de $L/\mathbb{Q}$ y L/K.

d) Calcula $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ y $N = \mathrm{Gal(L/K)}$. ¿Qué relación existe entre estos grupos?

e) Prueba que $G = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^6 = \tau^2 = 1,\ \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \rangle \cong \mathsf{D}_{12}$, y que $N \cong \mathsf{S}_3$.

f) Encuentra una subextensión $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq L$ tal que $G/\mathrm{Gal}(L/E) \cong \mathsf{S}_3$

5. Sea $\xi \in \mathbb{C}$ de orden 5, decidir si $i \in \mathbb{Q}(\xi)$.

6. Sea p un primo y $f(x) = x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Calcula el cuerpo de descomposición L de $f(x)$.

b) Demuestra que $L/\mathbb{Q}$ es simple de grado $p - 1$.

c) Demuestra que $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ es cíclico encontrando un isomorfismo entre G y $\mathbb{F}_p^\times$.

d) Demuestra que si p es impar, entonces L contiene exactamente un cuerpo cuadrático.

7. Sea $L = \mathbb{Q}(\xi)$ donde $\xi = e^{\frac{2\pi i}{11}}$.

a) Demuestra que L es una extensión de Galois de $\mathbb{Q}$.

b) Demuestra que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ es cíclico. Encuentra un generador y expresa todos los automorfismos en función de este generador.

c) Calcula el retículo de subgrupos de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

d) ¿Cuántas subextensiones propias tiene $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$? ¿Qué grados tienen?

e) Calcula el retículo de subcuerpos de $L/\mathbb{Q}$.

f) Decide cuáles de los siguientes cuerpos son subextensiones de $L/\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{11}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{-11}),\ \mathbb{Q}(i),\ \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}).$$

8. Sea L/K una extensión de Galois con $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ cíclico de orden n. Demuestra que:

a) Para cada divisor d de n existe exactamente un cuerpo intermedio E con $[L : E] = d$.

b) Si E_1 y E_2 son dos cuerpos intermedios, entonces

$$E_1 \subseteq E_2 \qquad \text{si, y solo si,} \qquad [L : E_2] \text{ divide a } [L : E_1].$$

c) Demuestra que la hipótesis L/K de Galois puede relajarse a que L/K sea finita.

9. Sea L el cuerpo de descomposición de $f(x) = x^p - 2$ sobre $\mathbb{Q}$, donde p es un primo.

a) Demuestra que $L = \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$ donde $\xi^p = 1$, $\xi \neq 1$ y $\alpha^p = 2$.

b) Demuestra que $[L : \mathbb{Q}] = p(p-1)$.

c) Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : d \in \mathbb{F}_p^\times, c \in \mathbb{F}_p \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. Prueba que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong H$.

10. Sea L el cuerpo de descomposición de $f(x) = x^{12} - 3$ sobre $\mathbb{Q}$.

a) Calcula $[L : \mathbb{Q}]$.

b) Prueba que $E = \mathbb{Q}(i) \subseteq L$ y, por tanto, L es el cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre E.

c) Prueba que L/E es una extensión simple y concluye que $f(x)$ es irreducible sobre E.

d) Demuestra que $\mathrm{Gal}(L/E)$ tiene una presentación de la forma

$$\langle \tau, \sigma |\ \tau^6 = 1, \sigma^2 = \tau^3, \sigma^{-1}\tau\sigma = \tau^{-1} \rangle \,.$$

11. Sea L el cuerpo de descomposición de $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Calcula el grado de $L/\mathbb{Q}$.

b) Describe el grupo de Galois de la extensión $L/\mathbb{Q}$ y determina su clase de isomorfía.

c) Encuentra todas las subextensiones de $L/\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Q}$.

12. Sea $f(x) = (x^2 - p)(x^2 - q) \in \mathbb{Q}[x]$ donde $p \neq q$ son primos y L el cuerpo de descomposición de $f(x)$. Determina la clase de isomorfía de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

13. Sea L/K una extensión de Galois con $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathsf{C}_2 \times \mathsf{C}_2$ y $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Demuestra que existen $\alpha, \beta \in L$ tales que $L = K(\alpha, \beta)$ con $\alpha^2, \beta^2 \in K$.

14. Sea L el cuerpo de descomposición de un polinomio irreducible $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ tal que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ es abeliano. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(\alpha) = 0$. Demuestra que el grado de $f(x)$ es primo si, y solo si, no hay extensiones intermedias entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}(\alpha)$.

15. Sea L/K una extensión de Galois, sea E/K una subextensión y sea $\alpha \in E$. Demuestra que $E = K(\alpha)$ si, y solo si, los elementos de $\mathrm{Gal}(L/K)$ que fijan α son exactamente $\mathrm{Gal}(L/E)$. Utilizando este resultado demuestra que:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5} + \sqrt{5})$;

b) El cuerpo de descomposición de $x^6 - 3x^3 + 2$ es $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{-3})$.