Extensiones normales y separables

1. Estudiar si la extensión $K/\mathbb{Q}$ es normal para K cada uno de los siguientes cuerpos:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5})\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt[3]{5})\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{-5})\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt[4]{8})\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt[8]{16}).$$

2. Demuestra que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ no es una extensión normal de $\mathbb{Q}$. Encuentra una extensión normal de $\mathbb{Q}$ que contenga a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ como un subcuerpo.

3. Demuestra que $\mathbb{Q}(\xi_5)$, donde $\xi_5 = e^{2\pi i/5}$, es una extensión normal de $\mathbb{Q}$.

4. Si M/L y L/K son extensiones normales, demuestra M/K no es necesariamente normal.

5. Encuentra la menor extensión normal de $\mathbb{Q}$ que contiene a $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$.

6. Demuestra que la extensión $\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x^6)$ es normal y calcula su grupo de automorfismos.

7. Demostrar que toda extensión de grado 2 es normal.

8. Sea L/K una extensión de grado 2. Si la característica de K no es 2, prueba que existe un $u \in L$ de modo que $L = K(u)$ y $u^2 \in K$. Muestra que la hipótesis sobre la característica es necesaria.

9. Sean $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Q}$. Determinar si $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n})/\mathbb{Q}$ es una extensión normal.

10. Determinar todas las extensiones de grado 3 de $\mathbb{F}_2$. Estudiar la normalidad de cada una de ellas. Encontrar un isomorfismo explícito entre aquellas que sean isomorfas.

11. Calcular la clausura normal de cada una de las siguientes extensiones:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})/\mathbb{Q}\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}\,,\quad \mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}\,,\quad \mathbb{Q}(i,\zeta_8)/\mathbb{Q}\,,$$

donde $\zeta_8^8 = 1$.

12. Indica cuáles de los siguientes polinomios son separables sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{F}_5$:

$$x^3+1,\quad x^2+x+1,\quad x^4+x^3+x^2+x+1.$$

13. Sea $K = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^2+x+1\rangle$. Demuestra que $K/\mathbb{F}_2$ es separable.

14. Demuestra que $\mathbb{F}_2(t)/\mathbb{F}_2(t^2)$ no es separable.

15. Encuentra elementos primitivos en el caso de las siguientes extensiones:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$.

c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}(i)$.

16. Construye cuerpos finitos con 8, 9, 25 y 27 elementos.

17. Prueba que para cada primo p y para cada entero positivo n, existe al menos un polinomio irreducible $f \in \mathbb{F}_p[x]$ de grado n.

18. Sea $f(x) = x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$ con $q = p^n$.

a) Demuestra que cualquier polinomio irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$ de grado n divide a $f(x)$.

b) Demuestra que el grado de todos los factores irreducibles de $f(x)$ divide a n.

19. Responde, de manera razonada, a las siguientes preguntas:

a) Si en $\mathbb{F}_2[x]$ consideramos $f(x) = x^3 + x + 1$, demuestra que $K = \mathbb{F}_2[x]/\langle f(x)\rangle$ es un cuerpo finito y enumera sus elementos. Halla el inverso del elemento $x^2+x+1+\langle f(x)\rangle \in K$. Comprueba que el grupo multiplicativo de K es cíclico.

b) Halla un generador del grupo multiplicativo del cuerpo $K = \mathbb{F}_3[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ y expresa todo elemento de $K^\times$ como potencia de dicho generador.