TEORÍA DE GALOIS (10-10-2023)	Grado en Matemáticas Curso 2023–24	Hoja nº 2_b

Extensiones Algebraicas: Cuerpo de descomposición. Grupo de automorfismo

1. Construye cuerpos de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ de los polinomios x^3-1, x^4+5x^2+5 y x^6-8 y calcula el grado de la extensión correspondiente.

2. Sean $f(x)=(x^2-3)(x^3+1)\in\mathbb{Q}[x]$ y $g(x)=(x^2-2x-2)(x^2+1)\in\mathbb{Q}[x]$. Demuestra que $\mathbb{Q}(\sqrt{3},i)$ es cuerpo de descomposición de f y g sobre $\mathbb{Q}$.

3. Demuestra que $\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$ es un cuerpo de descomposición de $x^2-2\sqrt{2}x+3$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

4. Demuestra que $K=\mathbb{F}_2[x]/\langle x^3+x+1\rangle$ es el cuerpo de descomposición de x^3+x+1 y x^3+x^2+1 sobre $\mathbb{F}_2$.

5. Decide justificadamente si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) Sea K un cuerpo y sea $p(x)\in K[x]$. Entonces existe una extensión de K donde $p(x)$ tiene una raíz.

b) Sea K un cuerpo y $p(x)\in K[x]$. Entonces existe una extensión de K donde $p(x)$ se descompone completamente..

c) Supongamos que $f(x)\in K[x]$ se descompone completamente en $K[x]$, supongamos que $p(x)\in K[x]$ no es constante y que $p(x)$ divide a $f(x)$ en $K[x]$. Entonces $p(x)$ se descompone completamente en $K[x]$.

d) Supongamos que $K\subseteq L\subseteq M$ son extensiones de cuerpos. Sea $f(x)\in K[x]$ no constante. Si M es cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre K, entonces M es cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre L.

e) Si $L=K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ y $\sigma\in\mathrm{Aut}(L/K)$ tal que $\sigma(\alpha_i)=\alpha_i$ para todo i, entonces $\sigma=\mathrm{id}_L$.

6. ¿Cuántas raíces distintas tiene $x^{12}+2x^6+1\in\mathbb{F}_3[x]$ en su cuerpo de descomposición?

7. Sea K es un cuerpo de característica p y $a\in K$. Demuestra que el polinomio $p(x)=x^p-x+a$ o bien se se descompone completamente en $K[x]$ o bien es irreducible.

8. Sea p un número primo y $a\in\mathbb{Z}$ no divisible por p. Se definen los polinomios de Artin-Schreier como $AS(x)=x^p-x+a$. Demuestra que o bien descomponen completamente o bien son irreducibles.

9. Calcula los siguientes grupos de automorfismos:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}),\qquad \mathrm{Aut}(\mathbb{R}/\mathbb{Q}),\quad \text{y}\quad \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{R}).$$

10. Encuentra el grupo de automorfismos sobre $\mathbb{Q}$ del cuerpo de descomposición de los siguiente polinomios :

$$x^{12}-1,\quad x^4-2,\quad x^4+x^2-6,\quad (x^3-2)(x^2-2).\quad x^p-1,$$

donde $p\in\mathbb{N}$ es un número primo.

11. Sea $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1\in\mathbb{Q}[x]$. Calcula el cuerpo de descomposición L de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ y el grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$.