TEORÍA DE GALOIS	Grado en Matemáticas	Hoja
(8-10-2023)	Curso 2023–24	nº 2_a

Extensiones Algebraicas. Polinomio Mínimo

1. Calcula el polinomio mínimo sobre $\mathbb{Q}$ de:

$$\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}, \qquad \beta = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} - 1, \qquad \gamma = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}.$$

2. Sea $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Calcula el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$, sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ y sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

3. Calcula, utilizando polinomios mínimos, el grado y una base de las siguientes extensiones de cuerpos.

(a)	$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{3})/\mathbb{Q}$	(b)	$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$	(c)	$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i)/\mathbb{Q}$
(d)	$\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)/\mathbb{Q}$	(e)	$\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt[3]{7})/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$	(f)	$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
(g)	$\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{3}})/\mathbb{Q}$	(h)	$\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5})/\mathbb{Q}$	(i)	$\mathbb{R}(\sqrt[4]{-3})/\mathbb{R}$.

4. Calcular una $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ y expresar en función de esa base los siguiente elementos de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2}}, \qquad \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} - 1}, \qquad (1 + \sqrt[3]{2})^{-1}, \qquad \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{2 - \sqrt[3]{2}}.$$

5. Encontrar una $\mathbb{Q}$-base de la extensión $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$. Expresar en función de dicha base el inverso de $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

6. Calcular el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$ en los siguientes casos:

$$\alpha = 2 + \sqrt{5}\,, \qquad \alpha = \sqrt[4]{5} + \sqrt{5}\,, \qquad \alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}.$$

7. Calcular el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$ en los siguientes casos:

a) $\alpha = \beta^2 - 1$, donde β es raíz del polinomio $x^3 - 2x - 2$.

b) $\alpha = \beta^2 + \beta$, donde β es raíz del polinomio $x^3 + 3x^2 - 3$.

c) $\alpha = 1/\beta^2$, donde β es raíz del polinomio $x^4 + x^3 + 1$.

8. Razonar si el elemento α genera cada una de las siguientes extensiones de $\mathbb{Q}$:

a) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

b) $\alpha = 2 + \sqrt[3]{9} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$.

c) $\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

d) $\alpha = \beta^2 + \beta + 1 \in \mathbb{Q}(\beta)$ tal que β es raíz de $x^3 + 5x - 5$.

9. Considera las siguientes cuestiones sobre las raíces de la unidad, donde q es un primo impar:

a) Sea $1 \neq \xi \in \mathbb{C}$ tal que $\xi^q = 1$. Demuestra que $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = q - 1$.

b) Sea $\omega = \cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6} i}$. Observa que $\omega^{12} = 1$ pero que $\omega^r \neq 1$ si $1 \leq r < 12$.

c) Demuestra que $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 4$ y calcula el polinomio mínimo de ω sobre $\mathbb{Q}$.

d) Calcula el grado del polinomio mínimo de $\cos(2\pi/q)$ sobre $\mathbb{Q}$.

e) Deduce que $\cos(2\pi/q) \in \mathbb{Q}$ si, y solo si, $q \in \{2, 3\}$.

f) Demuestra que $\operatorname{sen}(2\pi/q) \in \mathbb{Q}$ si, y solo si, $q = 2$.

10. Sea E/K una extensión de cuerpos y $\alpha \in E$. Prueba que $K[\alpha]$ es un cuerpo si, y solo si, $K(\alpha)/K$ es una extensión algebraica.

11. Considera E/K una extensión de cuerpos y un polinomio $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in E[x]$ tal que $a_0, \ldots, a_n$ son algebraicos sobre K. Demuestra que si $u \in E$ es una raíz de $f(x)$, entonces u es algebraico sobre K.

12. Sea E/K una extensión y $\alpha \in E$ algebraico sobre K. Si L es un cuerpo intermedio, demuestra que el polinomio mínimo de α sobre L divide al polinomio mínimo de α sobre K. Concluye que $|L(\alpha) : L| \leq |K(\alpha) : K|$.

13. Considera una extensión de cuerpos E/K. Suponiendo que el polinomio mínimo de un elemento α sobre un cuerpo K es $x^3 + x - 1$, halla el polinomio mínimo de α^2 sobre K.

14. Sea E/K una extensión y sean $\alpha, \beta \in E$ algebraicos sobre K con

$$[K(\alpha) : K] = n \qquad \text{y} \qquad [K(\beta) : K] = m.$$

a) Prueba que $[K(\alpha, \beta) : K(\beta)] \leq n$.

b) Si n y m son coprimos, prueba que $K(\alpha) \cap K(\beta) = K$ y $[K(\alpha, \beta) : K] = nm$. Demuestra que $p_{\alpha/K}(x) = p_{a/K(\beta)}(x)$.

c) Calcula $p_{\alpha/\mathbb{Q}}(x)$ donde $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$.

15. Decide justificadamente si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) Sea E/K una extensión finita y $f(x) \in K[x]$ irreducible. Si el grado de $f(x)$ y el grado de E/K son coprimos, entonces $f(x)$ no tiene raíces en E.

b) Sea E/K una extensión finita y $f(x) \in K[x]$ un polinomio irreducible. Si $f(x)$ tiene una raíz en E, entonces el grado de $f(x)$ es igual a $[E : K]$.

c) Sea E/K una extensión finita y $f(x) \in K[x]$ un polinomio irreducible. Si $f(x)$ tiene una raíz en E, entonces el grado de $f(x)$ divide a $[E : K]$.

d) Sea E/K una extensión y supongamos que $\alpha, \beta \in E$ son algebraicos sobre K. Si existe un isomorfismo de cuerpos $\theta \colon K(\alpha) \to K(\beta)$ tal que $\theta(\alpha) = \beta$ y $\theta(k) = k$ para todo $k \in K$, entonces existe un polinomio irreducible $f(x) \in K[x]$ tal que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

e) Sea E/K una extensión y supongamos que $\alpha, \beta \in E$ son algebraicos sobre K. Si existe un isomorfismo de cuerpos $\theta \colon K(\alpha) \to K(\beta)$ tal que $\theta(\alpha) = \beta$, entonces existe un polinomio irreducible $f(x) \in K[x]$ tal que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.