TEORÍA DE GALOIS (3-10-2023)	Grado en Matemáticas Curso 2023–24	Hoja nº 1

Introducción a la Teoría de cuerpos.

1. Dado K un cuerpo y $\alpha \in K$, definimos el conjunto

$$K(\sqrt{\alpha}) := \{a + b\sqrt{\alpha} \, : \, a, b \in K\}.$$

Demostrar que $K(\sqrt{\alpha})/K$ es una extensión de cuerpos.

2. Sea $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})(\sqrt{5})$ y $M = \mathbb{Q}(\sqrt{5})(\sqrt{3})$.

a) Demuestra que $M = L$.

b) Calcula $[L : \mathbb{Q}]$, $[L : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$ y $[L : \mathbb{Q}(\sqrt{5})]$.

3. Estudia cuáles de los siguientes subcuerpos de $\mathbb{C}$ coinciden:

$$\begin{array}{lll} K_1 = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2}), & K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{-2}), & K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + i), \\ K_4 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right), & K_5 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right), & K_6 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, i, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right) \end{array}$$

4. Halla el grado y una base de las siguientes extensiones de cuerpos.

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ **b)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i)/\mathbb{Q}$ **c)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)/\mathbb{Q}$ **d)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$

e) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ **f)** $\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{3}})/\mathbb{Q}$ **g)** $\mathbb{R}(\sqrt[4]{-3})/\mathbb{R}$

5. Halla el grado y una base de la extensión $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^2)$. Calcula t^{-1} y $(t+1)^{-1}$ como combinación lineal de los elementos de la base que has encontrado.

6. Considera una extensión de cuerpos E/K.

a) Demuestra que una extensión de grado primo es simple.

b) Si $\alpha \in E$ es tal que $K(\alpha)/K$ es una extensión de grado impar. Demuestra que $K(\alpha^2) = K(\alpha)$.

c) Si L_1 y L_2 son cuerpos intermedios tales que L_1/K y L_2/K son extensiones finitas de grados primos entre sí, demuestra que $L_1 \cap L_2 = K$.

7. Sea $K = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$.

a) Demuestra que K es un cuerpo con cuatro elementos, y escribe la tabla del producto de K.

b) Determina todos los automorfismos de K.

c) Demuestra que cualquier otro cuerpo con 4 elementos es isomorfo a K.

8. Considera E/K una extensión de cuerpos, y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ elementos de E. Sea $\sigma \colon E \to L$ un isomorfismo de cuerpos. Prueba la igualdad:

$$\sigma(K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \sigma(K)(\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_n)) \, .$$

9. Supongamos que E_1/K_1 es una extensión finita y que E_2/K_2 es otra extensión tal que existe un isomorfismo de cuerpos

$$\sigma : E_1 \to E_2.$$

Demuestra que si $\sigma(K_1) = K_2$, entonces $[E_1 : K_1] = [E_2 : K_2]$.