TEORÍA DE GALOIS (17-9-2023)	**Grado en Matemáticas** **Curso 2023–24**	**Hoja nº 0_G**

Repaso de Teoría de Grupos.

$\mathcal{C}_n$ = grupo cíclico de orden n.
$\mathcal{S}_n$ = grupo de permutaciones de n elementos.
$\mathcal{D}_{2n}$ = grupo Dihedral de $2n$ elementos.
$\mathcal{A}_n$ = el grupo alternado de n elementos.

1. Sean $p, m \in \mathbb{N}$ tal que p es primo. Para los grupos siguientes:

$$\mathcal{C}_p, \qquad \mathcal{C}_{p^2}, \qquad \mathcal{C}_p \times \mathcal{C}_p, \qquad \mathcal{C}_{p^n}$$

a) Determinar todos sus subgrupos indicando sus ordenes y aquellos que sean normales.

b) Dibujar el grafo del retículo de subgrupos.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Describir todos los subgrupos de $\mathcal{C}_n$.

3. **a)** Dibujar el grafo del retículo de subgrupos de $\mathcal{S}_3$ y de $\mathcal{C}_6$.

b) Demostrar que todo grupo de orden 6 es isomorfo a $\mathcal{S}_3$ o a $\mathcal{C}_6$.

4. Sea $p \in \mathbb{N}$ un primo.
a) Determinar todos los subgrupos de $\mathcal{D}_{2p}$ indicando sus ordenes y aquellos que sean normales.

b) Dibujar el grafo del retículo de subgrupos de $\mathcal{D}_{2p}$.

5. Sea $\mathcal{Q}_8$ el grupo multiplicativo que se obtiene de los cuarterniones de Hamilton generado por $\{i, j\}$. Para este grupo:
a) Dar una presentación con generadores y relaciones.

b) Demostrar que no es abeliano.

c) Determinar todos sus subgrupos indicando sus ordenes y aquellos que sean normales.

d) Dibujar el grafo del retículo de subgrupos.

e) Determinar si es resoluble o no.

6. Dibujar el grafo del retículo de subgrupos de $\mathcal{A}_4$.

7. Sea G un grupo finito. Demostrar que si $g^2 = e$ para todo $g \in G$, entonces G es abeliano.

8. Demostrar que todo grupo no abeliano de orden 8 es isomorfo a $\mathcal{D}_8$ o a $\mathcal{Q}_8$.

9. Sea G un grupo. Demostrar que G es resoluble si existe una cadena normal de subgrupos:

$$\{e\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_{n-1} \lhd H_n = G$$

tal que H_{i+1}/H_i es cíclico de orden primo para $i = 0, \ldots, n-1$

10. Sea G un grupo y $H \leq G$. Demostrar:
a) Si G es resoluble entonces H también.

b) Si $H \trianglelefteq G$. G es resoluble si y sólo si H y G/H son resolubles.