TEORÍA DE GALOIS	Grado en Matemáticas	Hoja
(21-9-2023)	Curso 2023–24	nº 0_A

Repaso de Teoría de Anillos.

1. Decide de manera razonada si los siguientes anillos son cuerpos:

a) $R_1 = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

b) $R_2 = \{a + b\xi : a, b \in \mathbb{F}_3,\ \xi^2 = -1\}$.

c) $R_3 = \{a + b\mu : a, b \in \mathbb{F}_5,\ \mu^2 = 2\}$.

2. ¿Cuántos elementos tiene el anillo $\mathbb{F}_3[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$? ¿Se trata de un cuerpo?

3. Sea K un cuerpo. El subcuerpo más pequeño de K recibe el nombre de *subcuerpo primo de* K. Si $\mathrm{char}(K) = 0$ el subcuerpo primo es isomorfo a $\mathbb{Q}$; mientras que si $\mathrm{char}(K) = p$, para algún primo p, es isomorfo a $\mathbb{F}_p$.

a) Sean K y L dos cuerpos. Si $f : K \to L$ es un homomorfismo entonces f induce un isomorfismo entre los subcuerpos primos de K y L.
En particular para todo primo p, demuestra que no existe ningún homomorfismo de anillos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{F}_p$; ni tampoco ningún homomorfismo de anillos $g : \mathbb{F}_p \to \mathbb{Q}$.

b) Demuestra que el único homormofismo de anillos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es la identidad. ¿Qué ocurre para $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$?.

4. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) No existe ningún homomorfismo de anillos $f : \mathbb{Q}[i] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

b) Existen infinitos homomorfismos de anillos $f : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

c) No existe ningún homomorfismo de anillos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

5. Sea $R \subset T$ una inclusión de anillos y sea $b \in T$. Consideramos la función:

$$\begin{array}{rccl} f_b : & R[x] & \to & T \\ & p(x) & \mapsto & f_b(p(x)) = p(b). \end{array}$$

a) Demuestra que f es un homomorfismo de anillos. Llamado homomorfismo de evaluación.

b) Describe $\ker(f)$ en los casos siguientes:

(i) $R = \mathbb{Q}$, $T = \mathbb{R}$, $b = 5$.

(ii) $R = \mathbb{Q}$, $T = \mathbb{R}$, $b = \sqrt[3]{2}$.

(iii) $R = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{C}$, $b = i$.

6. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ impares. Demuestra que los siguiente polinomios son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$:

$$x^2 + ax + b\,, \qquad x^3 + ax + b\,, \qquad x^4 + ax + b.$$

7. Sea K un cuerpo. Demuestra:

a) Todo ideal en $K[x]$ es principal.

b) Un ideal $I \subset K[x]$ es maximal si y sólo si está generado por un elemento irreducible.

c) En $K[x]$ todo elemento irreducible es primo.

d) Todo polinomio en $K[x]$ se puede escribir como producto de un número finito de irreducibles, siendo la expresión única salvo orden de los factores y/o producto por unidades

e) Demuestra que todo polinomio de grado 1 en $K[x]$ es irreducible y tiene una raíz en K.

f) (Teorema de Ruffini) Sean $p(x) \in K[x]$ y $a \in K$. Entonces $p(a) = 0$ si y sólo si $p(x) \in \langle x-a \rangle$.

g) Todo polinomio de grado dos o tres es irreducible en $K[x]$ si y sólo si no tiene raíces en K.

h) ¿Es cierto el apartado anterior si el grado del polinomio es mayor que tres?

i) Sea $a \in K$. Un polinomio $p(x) \in K[x]$ es irreducible si y sólo si $q(x) = p(x+a)$ lo es.

j) Sea $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ en $K[x]$ con $a_0 \cdot a_n \neq 0$. Entonces, f es irreducible si y sólo si $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ es irreducible.

8. Demuestra que el polinomio $x^4 - 10x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y sin embargo es reducible en $\mathbb{F}_p[x]$ para todo primo p.

9. Demuestra que para cada $n \geq 1$ hay infinitos polinomios en $\mathbb{Q}[x]$ irreducibles de grado n.

10. Decide razonadamente si los siguientes polinomios son reducibles en $\mathbb{Q}[x]$:

$$\begin{array}{llll} x^4+3x+6, & x^4+x^2+1, & x^3+11^{11}x+13^{13}, & x^3+x+1 \\ x^4-x^3-x-1, & \frac{1}{3}x^5+\frac{5}{2}x^4+\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}, & x^5-9x^2+1. & \end{array}$$

11. Demuestra que todo polinomio irreducible $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tiene grado 1 ó 2.

12. Factoriza el polinomio $x^4 - 1$ como producto de polinomios mónicos irreducibles sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.

13. Factoriza como producto de polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{F}_2[x]$ y en $\mathbb{F}_3[x]$ los polinomios:

$$f_1(x) = x^4-1, \quad f_2(x) = x^4+x^3-x^2, \quad f_3(x) = x^6+x^2+1, \quad f_4(x) = x^3-x+1, \quad f_5(x) = x^5-x^2+1.$$

14. Demuestra que $x^{p-1} - 1$ factoriza como producto de $p-1$ polinomios mónicos de grado uno en $\mathbb{F}_p[x]$.

15. Demuestra que las tres raíces complejas del polinomio $x^3 + px + q$ son de la forma

$$\omega^k \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{108}}} + \omega^{-k} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{108}}}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

donde $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$.

16. Aplicar la fórmula del ejercicio anterior para calcular las raíces complejas de los polinomios

$$x^3-6x-6\,, \qquad x^3-6x-4\,, \qquad x^3-2x+1\,, \qquad x^3-\sqrt{3}x^2-2x+2\sqrt{3}.$$

¿De cuál de los anteriores polinomios sabrías calcular las raíces sin utilizar las fórmulas anteriores?