CONJUNTOS Y NÚMEROS	Grado en Matemáticas Curso 2023–24	Examen 15-1-2024

Apellidos:______________________________

Nombre:______________________________

Grupo **711**

1a	1b	2	3	4
5	5	10	10	10

5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c
5	5	5	5	5	5	5	5	5

Razonar debidamente las respuestas

3 horas

FINAL **/85**

---

1. Decide razonadamente si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Recuerda que si son verdaderas tiene que dar una demostración y si son falsas un contraejemplo:

a) Sean P, Q proposiciones. Entonces $[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q] \Rightarrow (P \vee Q)$ es una tautología.

b) La función $f\colon \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ dada por $f([a]) = \left[\left\lfloor \sqrt{|a|} \right\rfloor\right]$ está bien definida.

Aquí $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x, es decir, el mayor entero menor o igual que $x \in \mathbb{R}$.

---

2. Sea A un conjunto finito de cardinal n y $B \subset A$ un subconjunto de cardinal m. Determina el cardinal del conjunto formado por los subconjuntos de A de p elementos que contienen a B.

---

3. En cierta plataforma online hay dos tipos de monedas virtuales: *Eurox* y *V-Maravedíes*. Adquirir 100 *Eurox* cuesta 18 euros, y adquirir 1000 *V-Maravedíes* cuesta 28 euros. No se pueden comprar menos de 100 *Eurox* ni 1000 *V-Maravedíes* de golpe. Un buen día, Enrique y Moisés se olvidan una tarjeta de crédito en el salón, y su hija la usa para comprar en esta plataforma. Por suerte, la tarjeta tiene un límite de gasto de 300 euros. ¿Cuál es el máximo gasto que puede hacer con la tarjeta? ¿Cuánto deberá comprar de cada moneda virtual para hacer el máximo gasto?

---

4. Los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ se definen de forma recursiva como:

$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1,\\
T_1(x) &= x,\\
T_{n+2}(x) &= 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).
\end{aligned}
$$

Demuestra que se verifica $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ para todo $n \geq 0$ y para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
(*Recordatorio:* $\cos(\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi) = 2\cos(\theta)\cos(\phi)$).

---

5. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$ las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) $3n^7 + 11n$ es divisible por 7.

b) $7n^3 + 11n$ es divisible por 3.

c) $\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{11}{21}n \in \mathbb{N}$.

---

6. Sea A un conjunto con una relación de orden $\preccurlyeq_A$ y B un conjunto con una relación de orden $\preccurlyeq_B$. Definimos la relación $\overset{\times}{\preccurlyeq}$ en $A \times B$ así:

$$(a_1, b_1) \overset{\times}{\preccurlyeq} (a_2, b_2) \text{ si } a_1 \preccurlyeq_A a_2 \wedge b_1 \preccurlyeq_B b_2.$$

a) Determina si $\overset{\times}{\preccurlyeq}$ es una relación de orden.

b) Suponiendo que $\preccurlyeq_A$ y $\preccurlyeq_B$ son de orden total, determina si $\overset{\times}{\preccurlyeq}$ es una relación de orden total.

c) Suponiendo que $\preccurlyeq_A$ y $\preccurlyeq_B$ son buenos órdenes, determina si $\overset{\times}{\preccurlyeq}$ es un buen orden.

---

7. Sea $f(x) = x^6 + x^3 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Demuestra que las raíces en $\mathbb{C}$ de $f(x)$ son de la forma ζ_n^k para ciertos $k \in \mathbb{N}$ ($\zeta_n := e^{2\pi i/n}$ donde $n \in \mathbb{N}$).

b) Factoriza $f(x)$ en $\mathbb{R}[x]$.

c) Demuestra que $f(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.