CONJUNTOS Y NÚMEROS	**Grado en Matemáticas** **Curso 2023–24**	**Examen** **24-11-2023**

APELLIDOS, NOMBRE: ____

1a	**1b**	**2a**	**2b**	**2c**	**2d**	**2e**	**2f**
5	15	3	3	4	4	3	3

3a	**3b**	**3c**	**4a**	**4b**	**4c**	**4d**
7	7	6	5	5	5	5

FINAL **/80**

Razonar debidamente las respuestas **Tiempo: 2 horas**

---

1. **a)** Encuentra todas las funciones inyectivas $f\colon \{1,2\} \to \{1,2,3\}$ que cumplen que $f(1) \neq 1$.

b) Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Encuentra el cardinal del conjunto de funciones inyectivas $f\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ que cumplen que $f(1) \neq 1$.

---

2. En $\mathbb{Q}$ se definen las operaciones:

$$a \star b := a + b - 1 \qquad , \qquad a \circ b := a + b - b \cdot a,$$

donde $a, b \in \mathbb{Q}$.

a) Determina el elemento neutro e de $(\mathbb{Q}, \star)$.
b) Para $a \in \mathbb{Q}$ determina b tal que $a \star b = e$.
c) Demuestra que $(\mathbb{Q}, \star)$ es un grupo abeliano.
d) Demuestra que $(\mathbb{Q}, \star, \circ)$ es un anillo.
e) Demuestra que $(\mathbb{Q}, \star, \circ)$ es un anillo conmutativo con unidad. ¿Quién es la unidad?
f) Determina si $(\mathbb{Q}, \star, \circ)$ es un cuerpo. En caso afirmativo, para $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq e$, determina b tal que $a \circ b = u$ donde u es la unidad calculada en el apartado anterior.

---

3. Sean A y B dos conjuntos no vacíos y sea $f\colon A \to B$ una función. Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en B. Definimos una relación en A, que llamamos $\mathcal{R}_f$, como

$$a_1 \mathcal{R}_f a_2 \iff f(a_1) \mathcal{R} f(a_2).$$

a) Demuestra que $\mathcal{R}_f$ es una relación de equivalencia.
Ahora consideramos que $A = B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ es la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ dada por: $x \mathcal{R} y \iff |x| = |y|$ (no tienes que demostrar que es de equivalencia) y $f(x) = \cos x$.

b) Demuestra que la siguiente función g está bien definida:

$$\begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{R}/\mathcal{R}_f & \longrightarrow & \mathbb{R}/\mathcal{R}, \\ & [x]_{\mathcal{R}_f} & \longmapsto & [\cos^2(x)]_{\mathcal{R}}. \end{array}$$

c) ¿Es g inyectiva?

---

4. Consideramos los conjuntos $A_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, el conjunto de sucesiones $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, donde los términos $a_i \in \{0,1\}$ y $A_3 = \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$, el conjunto de sucesiones $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, donde los términos $b_i \in \{0,1,2\}$.

a) Encuentra (con demostración) una función inyectiva $A_2 \to A_3$.

Sean dos funciones $h_0, h_1 \colon \{0,1,2\} \to \{0,1\}$ dadas por

$$h_0(0) = h_1(1) = 1; \quad h_i(x) = 0 \text{ en los demás casos.}$$

Consideramos la siguiente función $F\colon A_3 \to A_2$. Dada una sucesión $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, la sucesión $F(\{b_i\})$ está definida como la sucesión

$$h_1(b_1), h_0(b_1), h_1(b_2), h_0(b_2), h_1(b_3), h_0(b_3), \ldots,$$

es decir, la sucesión $\{a_i\}$, que cumple que

$$a_i = \begin{cases} h_0(b_k) & \text{si} \quad i = 2k\,, \\ h_1(b_k) & \text{si} \quad i = 2k-1\,. \end{cases}$$

b) Consideramos la sucesión $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, que está definida para cada i como el resto de dividir i por 3. Demuestra que $F(\{r_i\})$ es una sucesión periódica y calcúlala.

c) Demuestra que F es inyectiva.

d) Demuestra que $|A_2| = |A_3|$.