

APELLIDOS, NOMBRE: _____

1a	1b	1c	1d	2	3a	3b	3c	4a	4b
<input type="text"/>									
5	5	5	5	10	10	5	5	10	10

Razonar debidamente las respuestas

2 horas

FINAL

/70

1. Decide razonadamente si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Recuerda que si son verdaderas tiene que dar una demostración y si son falsas un contraejemplo.

a) Sean P, Q proposiciones. Definimos $P \dot{\sim} Q := (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$. Entonces $P \vee Q$ es lógicamente equivalente a $(P \dot{\sim} Q) \dot{\sim} (P \wedge Q)$.

b) $\log_{10}(20) \in \mathbb{Q}$.

c) La aplicación $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n, m) = \sum_{i=1}^{n+m} (i + m)$, es biyectiva.

d) Sean A y B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ una función. Para cualesquiera subconjuntos $C, D \subset A$, se tiene que

$$C \subset D \iff f(C) \subset f(D).$$

2. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

3. Sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que $D \neq \emptyset$ y $D \neq \{r\}$ para todo $r \in \mathbb{R}$. En el conjunto de funciones de D a \mathbb{R} , que denotaremos \mathcal{F} , definimos la relación \preceq como

$$f \preceq g \text{ si para todo } x \in D, f(x) \leq g(x).$$

a) ¿Es \preceq una relación de orden en \mathcal{F} ?

b) ¿Es \preceq una relación de orden total en \mathcal{F} ?

c) ¿Es \preceq un buen orden en \mathcal{F} ?

4. Sea \mathcal{U} un conjunto y $A, B \subset \mathcal{U}$ subconjuntos, definimos la función

$$f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B), \quad \text{dada por } f(X) = X \cap B.$$

a) Determina qué condiciones tiene que satisfacer B para que f sea inyectiva.

b) Determina qué condiciones tiene que satisfacer B para que f sea sobreyectiva.