CONJUNTOS Y NÚMEROS	Grado en Matemáticas	**Hoja**
(17-11-2023)	Curso 2023–24	**nº** 6_o

Cortaduras de Dedekind

1. Sean α y β cortaduras de Dedekind (i.e. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_D$). Se define la relación

$$\alpha \preceq \beta \Longleftrightarrow \alpha \subseteq \beta.$$

Se denota por $\alpha \prec \beta$ si $\alpha \preceq \beta$ y $\alpha \neq \beta$. Demostrar

a) $(\mathbb{R}_D, \preceq)$ es un conjunto ordenado. Es decir, $\preceq$ es una relación de orden en $\mathbb{R}_D$.

b) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_D$, entonces $\alpha = \beta$, $\alpha \prec \beta$ o $\beta \prec \alpha$.

c) $(\mathbb{R}_D, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto acotado superiormente (i.e. $\exists M \in \mathbb{R}_D$ tal que $a \preceq M$ para todo $a \in A$). Demostrar que A tiene un supremo. (*Sugerencia:* Demostrar que $\gamma = \cup_{\alpha \in A} \alpha \in \mathbb{R}_D$ es el supremo)

3. Dado $r \in \mathbb{Q}$ se define la cortadura asociada a r como:

$$r^\star := \{q \in \mathbb{Q} \,:\, q < r\}.$$

Demostrar que $r^\star \in \mathbb{R}_D$.

4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_D$. Se define la suma de α y β como

$$\alpha + \beta := \{p + q \,:\, p \in \alpha, q \in \beta\}.$$

Demostrar

a) $\alpha + \beta \in \mathbb{R}_D$.

b) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

c) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, para $\gamma \in \mathbb{R}_D$.

d) $\alpha + 0^\star = \alpha$.

e) Existe una única cortadura $\widehat{\alpha} \in \mathbb{R}_D$ tal que $\alpha + \widehat{\alpha} = 0^\star$. Denotaremos $-\alpha := \widehat{\alpha}$.

Conclusión: $(\mathbb{R}_D, +)$ es un grupo abeliano.

5. Sea $\alpha \in \mathbb{R}_D$. Demostrar que si $\alpha \preceq 0^\star$ entonces $0^\star \preceq -\alpha$.

6. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_D$. Si $0^\star \preceq \alpha$ y $0^\star \preceq \beta$, se define el producto de α y β como

$$\alpha \cdot \beta := \{p + q \,:\, p \in \alpha, q \in \beta\}.$$

Si $0^\star \preceq \alpha$ y $\beta \preceq 0^\star$ como $\alpha \cdot \beta := -(\alpha \cdot (-\beta))$.
Si $\alpha \preceq 0^\star$ y $0^\star \preceq \beta$ como $\alpha \cdot \beta := -((-\alpha) \cdot (\beta))$.
Si $\alpha \preceq 0^\star$ y $\beta \preceq 0^\star$ como $\alpha \cdot \beta := (-\alpha) \cdot (-\beta)$.
Demostrar:

a) $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}_D$.

b) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

c) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$, para $\gamma \in \mathbb{R}_D$.

d) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, para $\gamma \in \mathbb{R}_D$.

e) $\alpha \cdot 0^\star = 0^\star$.

f) $\alpha \cdot \beta = 0^\star \Longleftrightarrow \alpha = 0^\star$ o $\beta = 0^\star$.

g) $\alpha \cdot 1^\star = \alpha$.

h) Si $\alpha \neq 0^\star$, existe una única cortadura $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}_D$ tal que $\alpha \cdot \widetilde{\alpha} = 1^\star$.

<u>*Conclusión*</u>: $(\mathbb{R}_D \setminus \{0^\star\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
<u>*Conclusión*</u>: $(\mathbb{R}_D, +, \cdot)$ es un cuerpo totalmente ordenado y completo.

7. Sean $p, q \in \mathbb{Q}$. Demostrar:

a) $(p+q)^\star = p^\star + q^\star$.

b) $(p \cdot q)^\star = p^\star \cdot q^\star$.

c) $p^\star \preceq q^\star \Longleftrightarrow p \leq q$.

<u>*Conclusión*</u>: $\mathbb{R}_D$ extiende $\mathbb{Q}$.

8. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_D$ tales que $\alpha \preceq \beta$. Entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha \prec q^\star \prec \beta$.
<u>*Conclusión*</u>: $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}_D$.