CONJUNTOS Y NÚMEROS (15-11-2023)	Grado en Matemáticas Curso 2023–24	Hoja nº 6_b

Números Complejos

1. Hallar la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

a) $\dfrac{1-i}{1+i}$, *b)* $\dfrac{(3-i)(2+i)}{3+i}$, *c)* $\dfrac{(2-i)^2}{(3-i)^2}$, *d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{101} i^k$.

2. Calcular los valores

a) $|(2+i)(1-i)^4|$, b) $\left|\dfrac{1+\sqrt{3}i}{12-5i}\right|$, c) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

3. Determinar razonadamente para qué numeros complejos z y w de módulo 1 se cumple $z+w=2$. ¿Cuándo se cumple $z+w=1$ con z y w de módulo 1?

4. Probar las fórmulas $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{c^2+d^2}$ y $\dfrac{|z-i|^2}{\mathrm{Im}(z)}+2=a^2+b^2+c^2+d^2$ para $z=\dfrac{ai+b}{ci+d}$ con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tales que $ad-bc=1$.

5. Sean $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ con $ad-bc=1$.

a) Encuentra la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

b) Sea $f\colon D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$. Encuentra el dominio, imagen y la inversa de f (que estará definida en la imagen).

6. a) Demostrar que si dos enteros positivos n y m son suma de dos cuadrados de enteros, entonces su producto también es suma de dos cuadrados.

b) Usando que $13=2^2+3^2$ y $29=2^2+5^2$, hallar $a,b\in\mathbb{N}$ tales que $377=a^2+b^2$.

7. Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

a) $1+i$, *b)* $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, *c)* $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$, *d)* $-2-2i$.

8. Calcular

a) $\exp(\pi i/3)$, *b)* $\exp(-\pi i/4)$, *c)* $\exp(2019\pi i)$, *d)* $\exp(3^{2020}\pi i/2)$.

9. Calcular las partes real e imaginaria de cada uno de los siguientes números:

$$a)\ (1+i)^8, \qquad b)\ \left(\cos\frac{\pi}{12}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)^{20}, \qquad c)\ \left(\frac{1}{1-i}\right)^{2020}+\left(\frac{1}{1+i}\right)^{2020}.$$

10. Demostrar la siguiente identidad para x que no sea múltiplo entero de 2π y $N\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}=\frac{\mathrm{sen}\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\mathrm{sen}(x/2)}.$$

11. Calcular las raíces cuadradas (complejas) de los números:

a) $1+i$, *b)* $2-i$, *c)* $2+i$, *d)* $1+2i$.

12. Calcular las raíces complejas de los siguientes polinomios cuadráticos:

a) $z^2+3iz-3+i$, *b)* $2z^2+4z+2+i$.

13. Calcular los diferentes valores de:

a) $\sqrt[3]{-8}$, *b)* $\sqrt[3]{-i}$, *c)* $\sqrt[4]{16i}$, *d)* $(1+i)^n+(1-i)^n$, con $n\in\mathbb{N}$.

14. Para $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 1$, demostrar $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi ki/n}=0$.

15. Sea $z=2e^{2\pi i/5}+1+2e^{-2\pi i/5}$. Demostrar $z^2=5$. Deducir de ello una expresión para $\cos(2\pi/5)$, que utiliza sólo raíces cuadradas de números naturales.