

Cardinalidad en general

1. En $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ se define la siguiente relación: $X\mathcal{R}Y \iff \text{mín } X = \text{mín } Y$.
 - a) Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
 - b) ¿Cuál es el cardinal de cada una de las clases de equivalencia?
 - c) ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?
2. Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \subset B \subset C$ y A equipotente a C . Demostrar que los tres conjuntos son equipotentes .
3. Definimos la siguiente relación en \mathbb{R} : $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene cada clase de equivalencia? ¿Es numerable el conjunto cociente?
4. Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no es numerable.
5. Sea A un conjunto infinito. Demostrar que si $a_1, \dots, a_n \in A$ son elementos de A , entonces A es equipotente al conjunto $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.
6. Demuestra que todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.
7. Sea A un conjunto. Demuestra que A es infinito si existe un subconjunto $B \subset A$, $B \neq A$, y una biyección $f : B \rightarrow A$.
8. ¿Verdadero o falso?
 - a) Si $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$ y $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \emptyset$, entonces $|A_1 \cup B_1| = |A_2 \cup B_2|$.
 - b) Si $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$, $A_1 \subset B_1$ y $A_2 \subset B_2$, entonces $|A_1 \setminus B_1| = |A_2 \setminus B_2|$.
 - c) Si $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$, entonces $|A_1 \times B_1| = |A_2 \times B_2|$.
 - d) Si $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$, entonces $|A_1^{B_1}| = |A_2^{B_2}|$.
9. Determinar el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:
 - a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
 - b) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$.
 - c) $(-\pi/2, \pi/2)$.
 - d) El intervalo $I = (0, 1)$ y más generalmente el intervalo (a, b) .
 - e) $I \times I$.
 - f) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
 - g) El conjunto \mathbb{C} de los números complejos.
 - h) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
 - i) $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
 - j) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
 - k) Los intervalos $[a, b]$ y $[a, b)$ en \mathbb{R} .
 - l) El conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ de todas las raíces (rationales o no) de todos los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama *conjunto de los números algebraicos*).
 - m) El conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{N} que tienen dos elementos.
 - n) El conjunto de los números reales $x \in [0, 1)$ en cuyo desarrollo decimal no aparece el 9.