CONJUNTOS Y NÚMEROS (24-10-2023)	Grado en Matemáticas Curso 2023–24	Hoja nº 5_a

Cardinalidad: Conjuntos finitos

1. Para todo $n, k \in \mathbb{Z}$, con $0 \leq k \leq n$. Demostrar

a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

b) $\sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l} = \binom{n+1}{l+1}$.

2. Para todo $n, k \in \mathbb{Z}$, con $0 \leq k \leq n$, derivando k veces la igualdad polinómica $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ y evaluando en $x = 0$ obtener la igualdad $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

3. Sean A y B dos conjuntos finitos de m y n elementos respectivamente.

a) Hallar el número de funciones $f : A \longrightarrow B$.

b) Hallar el número de funciones inyectivas $f : A \longrightarrow B$.

4. Sea X un conjunto finito con n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene $X \times X$? ¿Cuántas funciones hay de X en $X \times X$?

5. Demostrar que dados n enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, no necesariamente distintos, existen enteros k y l con $0 \leq k < l \leq n$ tales que la suma $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ es un múltiplo de n.

6. Considerando que la amistad es siempre mutua, demostrar que en un grupo de n personas ($n \geq 2$) siempre existen dos con el mismo número de amistades en el grupo.

7. Demostrar que si elegimos 7 números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$, entre ellos siempre habrá dos que sumen 12.

8. Sea B un subconjunto finito de un conjunto A. En $\mathcal{P}(A)$ definimos la relación:

$$X\mathcal{R}Y \iff |X \cap B| = |Y \cap B|.$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Describir las clases de equivalencias y el conjunto cociente. ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

9. Demuestra que un conjunto finito totalmente ordenado está bien ordenado.

10. Demuestra que todo subconjunto de un conjunto finito es finito.

11. Sean A_1, A_2, A_3 conjuntos finitos. Demostrar

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

12. Sean $A_1 \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Demostrar

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \right| &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|. \end{aligned}$$

13. ¿Cuantos números menores o iguales que 420 son divisibles por 2, 3, 5 o 7?

14. Tenemos 10 pares de calcetines distintos. La lavadora elige 6 calcetines al azar para devorar. Pueden quedar entre 0 y 6 calcetines desparejados. Calcula la probabilidad de cada una de las posibilidades.

15.

a) Según las reglas del juego capicúa, gana quien ve un número de matrícula (de 4 cifras) que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Cuántos números capicúas hay?

b) Según las reglas del juego capicúa en la versión actualizada tras la convención internacional de juegos de coche de 1979, la cifra 0 es un comodín, y por ejemplo 2030 es capicúa. ¿Cuántos números capicúas hay?

16.

a) El dominó tiene fichas que contienen 2 números, cada uno del 0 al 6. Un juego de dominó tiene una ficha de cada una de las posibles. ¿Cuántas fichas de dominó hay en un juego?

b) El triominó tiene fichas con forma de triángulo equilátero y un número del 0 al 5 en cada esquina. Un juego de triominó contiene una ficha de cada una posible, **incluyendo reflejar en el espejo**. Es decir, hay una ficha con un 1, un 2 y un 3, en el sentido de las agujas del reloj, y no hay una ficha con 1, 2 y 3 en sentido antihorario. ¿Cuántas fichas tiene un juego de triominó?

c) ¿Cuántas fichas tendría un juego de triominó que tuviera todas las posibles fichas, y considerara fichas reflejadas en el espejo como distintas? Es decir, 1-2-3 (en sentido de las agujas del reloj) es distinta de 1-3-2, pero 1-2-3 es igual que 2-3-1 porque las fichas se pueden rotar.

17. En una partida de Burro con n jugadores se usan $4n$ cartas de n valores distintos, 4 de cada valor. Al empezar, se reparten al azar 4 cartas a cada jugador. Un jugador gana si tiene 4 cartas del mismo valor en la mano.

a) En una partida con 4 personas, A, B, C y D, ¿cuál es la probabilidad de que A gane con el reparto inicial?

b) En una partida con 2 personas, ¿cuál es la probabilidad de que alguien gane con el reparto inicial? ¿Y con 3 personas?

c) En una partida con 4 personas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una persona gane con el reparto inicial?

18. Un cubo de Rubik es un cubo $3 \times 3 \times 3$ que está compuesto de 26 cubitos. Hay 6 cubitos en el centro de las caras que están fijos, 12 cubitos en cada arista con 2 caras coloreadas, y 8 cubitos en los vértices con 3 caras coloreadas.
Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de posiciones distintas de un cubo de Rubik, es decir, maneras de recolocar los 18 cubitos que se pueden mover.

a) Calcula $|\mathcal{R}|$.

b) Dada una secuencia de movimientos S (por ejemplo, girar la cara roja 2 veces, luego la verde en sentido horario y luego la amarilla en sentido antihorario), demuestra que la función $s\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ dada que lleva una posición a la posición resultante tras aplicar S es biyectiva.

c) Dada una secuencia de movimientos S y una posición inicial P del cubo, demuestra que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que si se empieza por P y repetir la secuencia n veces, el cubo vuelve a la posición inicial P.

d) Dada una secuencia de movimientos S, demuestra que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier posición inicial P, si se empieza por P y repetir la secuencia n veces, el cubo vuelve a la posición inicial P.