CONJUNTOS Y NÚMEROS (17-10-2023)	Grado en Matemáticas Curso 2023–24	**Hoja nº** 4_b

Relaciones de Equivalencia

1. Considerar la relación definida sobre $\mathbb{R}$ por:

$$x \sim y \iff x^4 = y^4.$$

a) Se pide comprobar que es una relación de equivalencia y describir las clases de equivalencia.

b) Hacer lo mismo considerando la relación sobre $\mathbb{C}$.

2. Consideremos la relación definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

Se pide demostrar que es una relación de equivalencia y describir el conjunto cociente, identificándolo con un subconjunto conocido de $\mathbb{R}$.

3. Considerar la relación definida sobre el plano $\mathbb{R}^2$ por:

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff xy = x'y'.$$

Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.

4. Indicar cuáles de las siguientes funciones están bien definidas.

a) $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f([m]) = m.$

b) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad g(m) = [m].$

c) $G : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad G([m], [k]) = [m + k].$

d) $H : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad H([m], [k]) = [mk].$

5. Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación

$$(n, m)\mathcal{R}(n', m') \iff \text{máx}\{n, m\} = \text{máx}\{n', m'\}.$$

a) Demuestra que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Describe la clase de equivalencia del elemento $(2, 2)$.

c) Describe el conjunto cociente.

d) ¿Tienen todas las clases de equivalencia el mismo cardinal? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

6. Sea F el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En F se define la siguiente relación:

$$f\mathcal{R}g \iff \textit{existe } r \in \mathbb{R},\ r > 0 \textit{ tal que } f(x) = g(x) \textit{ para } |x| < r.$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia sobre F.

7. Considerar las relaciones en $\mathbb{Z}$ definidas por:

$$m\mathcal{R}_1 n \iff 5|(m + 2n),$$
$$m\mathcal{R}_2 n \iff 4|(9m + 3n).$$

a) Decidir si $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son relaciones de equivalencia.

b) En el caso de que lo sean, describir las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes.

8. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $a_n \in \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{S}_{>0}$ el subconjunto de sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $a_n > 0$ para todo n. Decidir cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia. Si escribimos "Si el límite es igual a..." hay que entender "si el límite existe y es igual a...".

a) $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = \text{lím}_{n\to\infty} b_n$.

b) $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si $\text{lím}_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$.

c) $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si $\{a_n - b_n\}$ está acotada, es decir, existen N y M tales que la sucesión está contenida en $[N, M]$).

d) $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si $\{a_n + b_n\}$ está acotada.

e) $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si existe un $N \geq 0$ y un polinomio $p(n)$ tal que para todo $n \geq N$, $p(n) > |a_n - b_n|$.

f) En $\mathcal{S}_{>0}$, $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

g) En $\mathcal{S}_{>0}$, $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ si $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

9. Supongamos que tenemos un conjunto A con una relación $\mathcal{R}$ que es reflexiva y transitiva, pero no necesariamente antisimétrica, por lo que no es necesariamente una relación de orden.

a) Definimos una relación $\sim$ en A dada por $x \sim y$ si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$. Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.

b) Demuestra que para cualesquiera x, x', y, y' en A que cumplan que $x \sim x'$ e $y \sim y'$,

$$x\mathcal{R}x' \iff y\mathcal{R}y'.$$

Concluye que $\mathcal{R}$ induce una relación en $A/\sim$. ¿Qué quiere decir "induce"[1]?

c) Demuestra que la relación inducida en $A/\sim$ es una relación de orden.

[1]Pista: La relación, si la llamamos $\overline{\mathcal{R}}$ cumple que $[x]\overline{\mathcal{R}}[y] \iff x\mathcal{R}y$