CONJUNTOS Y NÚMEROS (3-10-2023)	Grado en Matemáticas Curso 2023–24	Hoja nº 4_a

Relaciones de Orden

1. En el conjunto $\{a, b, c\}$, encuentra un ejemplo de una relación (o demuestra que no puede existir), que cumpla:

Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva	Relación
Sí	Sí	Sí	Sí	
Sí	Sí	Sí	No	
Sí	Sí	No	Sí	
Sí	Sí	No	No	
Sí	No	Sí	Sí	
Sí	No	Sí	No	
Sí	No	No	Sí	
Sí	No	No	No	
No	Sí	Sí	Sí	
No	Sí	Sí	No	
No	Sí	No	Sí	
No	Sí	No	No	
No	No	Sí	Sí	
No	No	Sí	No	
No	No	No	Sí	
No	No	No	No	

2. En cada uno de los siguientes casos, se da una relación entre elementos del conjunto correspondiente. Decidir cuáles son relaciones de orden; en caso de serlo, estudiar si es o no un orden total; de lo contrario, explicar qué propiedad le falla para ser un orden.

a) $|x| \leq |y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $a \leq c \ \wedge \ b \leq d$, $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$.

c) $a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2}$, $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$.

3. Sea X un conjunto no vacío y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se define en X la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Demostrar que la relación $\mathcal{R}$ es una relación de orden si y sólo si f es inyectiva.

4. Para la relación de orden dada en $\mathbb{N}$ por $x\mathcal{R}m$ si $n|m$, dar respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Tiene $\mathbb{N}$ un máximo y/o un mínimo para esta relación?

b) ¿Qué subconjuntos de $\mathbb{N}$ tienen un máximo y cuáles un mínimo?

c) Dado un intervalo $A = \{k \in \ \mathbb{N} : n \leq k \leq m\}$, ¿qué debe cumplir un $k \in A$ para ser un elemento maximal de A? ¿Y para ser minimal?

d) ¿Cuáles son los minimales de $\mathbb{N} \setminus \{1\}$?

e) Calcular los elementos minimales de $I = \{k \in \ \mathbb{N} : 1 < k \leq 100\}$.

5. Probar que están bien ordenados los siguientes subconjuntos de $(\mathbb{R}, \leq)$:

a) La unión $X \cup Y$ de dos subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, si cada uno de ellos está bien ordenado.

b) El conjunto $X = \{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ donde $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones crecientes.

6. Probar la afirmación siguiente o dar un contraejemplo que la refute:

Si un conjunto ordenado A tiene un solo elemento minimal a, entonces a es el mínimo de A.

7. Dar una biyección entre los conjuntos siguientes que transforme una en otra las relaciones de orden dadas sobre ellos:

a) $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(A, \leq)$ donde $A = \{1 \pm \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

b) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathcal{R})$ donde $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si y sólo si $|a - c| \leq d - b$ y $(D, \subset)$ donde D el conjunto de los discos abiertos del plano, con su centro en el eje x.
($\mathbb{R}_+$ es el conjunto de los números reales positivo)

8. ¿Existe una biyección entre $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{Q}, \leq)$ que transforme una en otra las relaciones de orden?

9. En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos la siguiente relación: $x\mathcal{R}y$ si x e y tienen el mismo signo y $|x| \leq |y|$.

a) Demostrar que es una relación de orden, pero que no es de orden total.

b) Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si los hay) del intervalo $[-3, 2)$.

10. Dado un alfabeto que, como el nuestro, tiene un orden total establecido, y llamando "palabras" a todas las posibles secuencias finitas de sus signos, se llama *orden lexicográfico* al usado en los diccionarios, listas de nombres, etc., para ordenar el conjunto de palabras.

a) Usando el signo '$\leq$' para el orden de las "letras", dar una definición de cuándo la palabra '$a_1a_2 \dots a_n$' precede a la '$b_1b_2 \dots b_m$' : decir qué deben cumplir sus letras para ello.

b) Con esa definición, probar que este orden es total; en consecuencia, cada conjunto finito de palabras tendrá un mínimo.

c) ¿ es cierto el apartado anterior para cualquier conjunto infinito de palabras? (y por lo tanto se trataría de un *buen orden*). Demostrarlo o dar un contraejemplo.

11. Se define $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y se considera la función

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow f(n, m) = 2^n 3^m \end{aligned}$$

y a partir de ella se definen las siguientes relaciones en $\widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}}$:

$$(n, m)\mathcal{R}_1(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \leq f(n', m')$$
$$(n, m)\mathcal{R}_2(n', m') \Leftrightarrow f(n, m) \mid f(n', m')$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son ambas relaciones de orden. ¿Son relaciones de orden total?

b) Hallar los elementos distinguidos (elementos maximales, elementos minimales, supremos, ínfimos, máximos y mínimos) del conjunto $A = \{(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : 1 \leq n + m \leq 4\}$ para cada una de la relaciones de orden $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.