| CONJUNTOS Y NÚMEROS (1-10-2023) | Grado en Matemáticas Curso 2023–24 | Hoja nº 3 |
|---|---|---|

## Funciones

**1.** ¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas? ¿Cuáles sobreyectivas? ¿Es alguna de ellas biyectiva? (Comenzar comprobando que todas ellas son funciones y que lo son entre los conjuntos que se indican).

**a)** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(m) = m + 2.$

**b)** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(m) = 2m - 7.$

**c)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x - x^3.$

**d)** $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^2 + 4x.$

**e)** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n(n + 1).$

**f)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$

**g)** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n^2 + n + 1.$

**h)** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad f(t) = t/(t + 1).$

**2.** Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |2x+1/2|-1/2$ , hallar su imagen y también $f(\mathbb{Z})$. Demostrar que $f$ no es ni sobreyectiva ni inyectiva. Probar que, sin embargo, se da una biyección entre $\mathbb{Z}$ y su imagen.

**3.** Sea $f : X \to Y$ una función. Dados subconjuntos $Z, W \subset Y$, demostrar:

**a)** $f^{-1}(Z \cup W) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W).$

**b)** $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W).$

**c)** $f(f^{-1}(Z)) = f(X) \cap Z.$

**d)** $X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z).$

**4.** Sea $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dada por $f(A) = \{(n + 1)/2 : (n \in A) \wedge (n \text{ es impar})\}$ para $A \subset \mathbb{N}$. Estudiar si la función es inyectiva y/o sobreyectiva. ¿Quién es $f^{-1}(\emptyset)$?

**5.** Sean $f, g : \mathbb{N} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{P} = \{primos\}$ las funciones definidas por

$f(n) =$ `el mayor primo que divide a` $n$

$g(n) =$ `el menor primo que divide a` $n$.

**a)** Decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.

**b)** ¿Quién es $f^{-1}(\{3\})$? ¿Quién es $g^{-1}(\{3\})$?

**6.** Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1, \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ (x - 1)^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

**a)** Dibujar los gráficos de las funciones $f,\ g,\ g \circ f$ y $f \circ g$.

**b)** Encontrar las imágenes de cada una de las cuatro funciones anteriores y decidir si son inyectivas y/o sobreyectivas.

**7.** Dadas funciones $f : X \to Y$ , $g : Y \to Z$ , probar las siguientes afirmaciones:

**a)** $f$ inyectiva y $g$ inyectiva $\Rightarrow g \circ f$ inyectiva.

**b)** $f$ sobre y $g$ sobre $\Rightarrow g \circ f$ sobre.

**c)** Si falta alguna de las dos hipótesis en los casos anteriores, la conclusión puede ser falsa.

**d)** Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces $g$ es sobreyectiva. Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces $f$ es inyectiva.

**e)** Si $g$ es biyectiva, $g \circ f$ es inyectiva si y sólo si lo es $f$, y es sobre si y sólo si lo es $f$.

**f)** Si además $X = Z$, la afirmación del apartado anterior también es cierta para $f \circ g$.

**8.** Sean $f, g : \mathbb{N} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{P} = \{primos\}$ las funciones del problema 5. Encuentra ejemplos de funciones $h$ que cumplan lo siguiente, o demuestra que no pueden existir.

**a)** $h \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}\setminus\{1\}}$

**b)** $h \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}\setminus\{1\}}$

**c)** $h \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}\setminus\{1\}}$ y además $h \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}\setminus\{1\}}$

**d)** $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}}$

**e)** $g \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}}$

**f)** $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}}$ y además $g \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}}$

**9.** Sean $A = \{1, 2, \mathbb{N}\}$ y $B = \{\emptyset, A\}$. Encuentra ejemplos de las siguientes funciones, o demuestra que no pueden existir:

**a)** $f\colon A \to B$ sobreyectiva y no inyectiva.

**b)** $f\colon A \to B$ no sobreyectiva e inyectiva.

**c)** $f\colon A \to B$ sobreyectiva e inyectiva.

**d)** $f\colon A \to B$ ni sobreyectiva ni inyectiva.

**e)** $f\colon B \to A$ sobreyectiva y no inyectiva.

**f)** $f\colon B \to A$ no sobreyectiva e inyectiva.

**g)** $f\colon B \to A$ sobreyectiva e inyectiva.

**h)** $f\colon B \to A$ ni sobreyectiva ni inyectiva.

**10.** Si existe, encuentra la inversa de las siguientes funciones. Si no existe, demuéstralo. Recuerda que $\sqrt{x}$ es el número $y \geq 0$ que cumple que $y^2 = x$, y que $\operatorname{arcsen}(x)$ se define como el número $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ que cumple que $\operatorname{sen}(y) = x$.

**a)** $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^3$.

**b)** $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$.

**c)** $f\colon [-\infty, 0) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$.

**d)** $f\colon [0, \infty) \to (-\infty, 0]$, $f(x) = -x^2$.

**e)** $f\colon [-\infty, 0) \to (-\infty, 0]$, $f(x) = -x^2$.

**f)** $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

**g)** $f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

**h)** $f\colon [0, \pi/2] \to [0, 1]$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

**i)** $f\colon [11\pi/2, 13\pi/2] \to [-1, 1]$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

**j)** $f\colon [13\pi/2, 15\pi/2] \to [-1, 1]$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

**11.** En los siguientes ejemplos de funciones $f\colon A \to B$, a veces $f(x)$ representa el valor de $f$ en $x \in A$, y a veces la imagen de un subconjunto de $A$. De la misma manera, a veces $f^{-1}(x)$ representa el valor de $f^{-1}$ en $x \in B$, y a veces representa la imagen inversa de un subconjunto de $B$. Calcula lo que corresponda, o explica si no tiene sentido lo que está escrito.
Sea la función $f\colon \{1, 2, \mathbb{N}\} \to \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}\}$ dada por $f(x) = \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{N}$ y $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$. Calcula:

**a)** $f(1)$

**b)** $f(2)$

**c)** $f(\mathbb{N})$

**d)** $f(\{1, 2\})$

**e)** $f(\mathbb{Q})$

**f)** $f(\varnothing)$

**g)** $f(\{1, \mathbb{N}\})$

**h)** $f^{-1}(\mathbb{R})$

**i)** $f^{-1}(\mathbb{Q})$

**j)** $f^{-1}(\{\mathbb{Q}\})$

**k)** $f^{-1}(\{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}\})$

**l)** $f^{-1}(\varnothing)$