CONJUNTOS Y NÚMEROS (11-9-2023)	Grado en Matemáticas Curso 2023–24	Hoja nº 1

Lógica elemental

1. Diga cuáles de las siguientes condiciones son *necesarias*, cuáles son *suficientes* y cuáles *son necesarias y suficientes* para que un número natural n sea divisible por 6.

a) n es divisible por 3;

b) $n = 24$;

c) n^2 es divisible por 6;

d) n es divisible por 12;

e) n es par y divisible por 3;

f) n es par o divisible por 3.

2. Se pide escribir el enunciado de la afirmación recíproca y de la contrarecíproco de la siguiente afirmación:

Si estudio mucho y el examen resulta fácil, obtendré buena nota.

3. Explique por qué son equivalentes las proposiciones: $S \vee (\neg R) \Rightarrow T$, $(\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$ y confírmelo con la tabla de verdad de cada una de ellas.

4. Compruebe que la proposición $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$, a veces llamada *silogismo*, es una tautología.

5. En las siguientes proposiciones, x, y son números reales. Traduzca cada una de ellas a frases que no contengan ningún símbolo, sólo palabras. Explique cuáles son ciertas y escriba la negación de las que no lo sean.

a) $\forall x\,((x > 0) \Rightarrow \exists y\,((y > 0) \wedge (y^2 = x)))$.

b) $\exists x\,\forall y\,((y > x) \Rightarrow (y > 5))$.

c) $\exists x\,(1 < x^2 < x)$.

d) $\forall y\,\exists x\,((x \in \mathbb{R}) \wedge (x^3 = y + 1))$.

6. Traduzca cada una de las siguientes afirmaciones a símbolos y cuantificadores. Las respuestas no deben contener palabras.

a) El número 5 tiene una raíz cuadrada positiva.

b) Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas.

7. Razone con palabras por qué los pares de afirmaciones que aparecen en cada apartado abajo no son equivalentes en los números en $\mathbb{N}$, y explique cuáles de ellas son ciertas.

a) $\forall x\,\exists y\,(x = 2y \vee x = 2y - 1)$ y $\exists x\,\forall y\,(x = 2y \vee x = 2y - 1)$.

b) $\exists x\,\forall y,\ x < y < x + 2$ y $\forall x\,\exists y,\ x < y < x + 2$.

8. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones en los números naturales? Se pide escribir su negación.

a) $\forall x\, \exists y,\ y < x$;

b) $\exists x\, \forall y\, \forall z,\ x < z < y$.

9. Demuestre por reducción al absurdo que $\log_3(1215)$ es irracional.

10. Demuestre por reducción al absurdo que los números

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}, \qquad \sqrt{\sqrt{5}-2}, \qquad \sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}, \qquad \sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$$

son irracionales. (*Sugerencia*: si α es racional, también lo son su cuadrado y su cubo.)
¿Lo es también $2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$? Razone la respuesta.

11. Se llama *cuadrado perfecto* a un número de la forma a^2 donde a es un número natural. Demuestre que si un número natural n es un cuadrado perfecto, entonces ninguno de los números $n+1$, $n+2$ puede ser un cuadrado perfecto. (Conviene recordar que $n > 0$ por defecto.)

12. Demuestre por inducción las siguientes identidades:

a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

b) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

c) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$, para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

13. Demostrar las siguientes desigualdades:

a) $2^n > n^2+1$ si $n \in \mathbb{N}, n > 4$.

b) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. Si $n \in \mathbb{N}$, demostrar que los siguientes números son divisibles por 9.

a) $a_n = 4^n + 6n - 1$.

b) La suma de los cubos de tres números naturales consecutivos.

15. Sean $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 7$ y $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2}$, para $n \geq 3$. Utilizando inducción, demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la fórmula $a_n = 1 + 2^n + 2(-1)^n$.

16. Sea $q \neq 1$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface la igualdad

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^{2^2})\cdots(1+q^{2^n}) = \frac{q^{2^{n+1}}-1}{q-1}.$$

17. Demuestre la *desigualdad de Bernoulli*: $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots x_n$, donde todos los números x_k son del mismo signo y cada $x_k \geq -1$. Deduzca que $(1+x)^n \geq 1+nx$ para $n \in \mathbb{N}$ y $x \geq -1$.