

Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales

- 1) Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.
 - i) $A = \{(3x_2, x_2, x_4 + x_2, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.
 - ii) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$.
 - iii) $C = \{(x_1, x_2, x_1, x_2) \mid x_1 = 1\}$.
 - iv) $D = \{(x_1, x_1, x_1, x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.
 - v) $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 2t, x_4 = 5t, t \in \mathbb{R}\}$.
- 2) Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.
 - i) ¿Son los vectores $(1, 2, 3), (1, 1, 1)$ combinación lineal del sistema $S = \{(1, 0, 1), (0, 2, 2)\}$?
 - ii) Calcular x e y , si es posible, para que el vector $(1, 2, x, y)$ sea combinación lineal de los vectores $(1, 2, 0, 2)$ y $(1, 1, 2, 3)$.
- 3) Estudiar si las siguientes familias de vectores del espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes.
 - i) $\{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 3, 2)\}$.
 - ii) $\{(1, 0, 0), (2, 1, 1), (0, 1, 1), (1, -1, -1)\}$.
- 4) Decide si el vector $(1, 0, 1, 0)$ es combinación lineal del sistema $\{(1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$
- 5) Sea $\mathbb{S}$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 3, 2)\}$. Expresa a $\mathbb{S}$ como el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo.
- 6) Halla las coordenadas de los vectores $(1, 2, 3)$ y $(1, 1, 0)$ respecto de la base $\mathbb{B} = \{(1, -1, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 4)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
- 7) Halla una base de los siguientes subespacios vectoriales:
 - a) $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^4$ generado por el conjunto de vectores $\{(1, -1, 0, 0), (2, 0, -1, -1), (1, 0, 0, -1), (1, -1, 1, -1)\}$.
 - b) $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ generado por $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (2, -1, -1), (-1, -1, 2)\}$.
- 8) Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 1, -1, 2)$ y $(-1, 2, 3, 3)$. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 7, 3, 12)$ y $(-4, 5, 1, 1)$. Sea $W = U + V$.
 - a) Halla una base de W .
 - b) Halla un sistema ecuaciones de W con el menor número de ecuaciones.
 - c) Demuestra que $(2, -3, 5, 7) \notin W$.
 - d) Demuestra que el vector $w = (27, 0, 27, 57)$ está en W . Halla $u \in U$ y $v \in V$ tales que $w = u + v$.
- 9) Halla una base y calcula la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.
 - a) $\mathbb{S}_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$
 - b) $\mathbb{S}_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

- 10) Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ del ejercicio 9.
- (a) Halla una base de $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ y de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$. Comprueba la fórmula de Grassmann.
- (b) Halla un sistema ecuaciones de $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ y de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ con el menor número de ecuaciones.
- 11) Sea $a \in \mathbb{R}$. Sean U y V los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad V : \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + ax_4 = 0 \end{cases}$$

- a) Halla los valores de a para los que $U \cap V \neq \{0\}$. Para esos valores, calcula una base de $U \cap V$ y un sistema de ecuaciones de $U \cap V$ con el menor número de ecuaciones.
- b) Para $a = -4$, halla $u \in U$ y $v \in V$ tales que $(3, 1, -2, 2) = u + v$.
- 12) Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados, para aquellas que sean lineales escribe la aplicación en forma matricial:
- a) $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f_1(v) = \lambda_0 v$ con $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ fijo.
- b) $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f_2(v) = v_0 - v$ con $v_0 \in \mathbb{R}^3$ fijo.
- c) $f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 1, x_3)$.
- d) $f_4: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f_4(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, 0, 0)$.
- e) $f_5: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f_5(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$.
- f) $f_6: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f_6(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$.
- 13) Sea $f: V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Halla la matriz de f sabiendo que:
- a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $f(1, 0) = 2$, $f(0, 1) = 1$.
- b) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2$, $f(1, 0) = (2, 0)$, $f(0, 1) = (1, 1)$.
- 14) Decide en cada caso si existe o no una aplicación lineal con las propiedades que se indican.
- a) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (0, 1)$.
- b) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(\alpha_i) = \beta_i$ ($i = 1, 2, 3$) con $\alpha_1 = (1, -1)$, $\alpha_2 = (2, -1)$, $\alpha_3 = (-3, 2)$, $\beta_1 = (1, 0)$, $\beta_2 = (0, 1)$ y $\beta_3 = (1, 2)$.
- 15) Se consideran las aplicaciones lineales $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$ y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$.
- a) Siendo V el subespacio $\langle (1, -1, 0), (1, 1, 1) \rangle$ calcular $f(V)$ y $g(V)$. Calcular también $f^{-1}(0, 0, 0)$ y $f^{-1}(2, 2, 1)$.
- b) Calcular $f^{-1}(W)$, siendo $W = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 = 3\lambda, x_2 = 2\lambda, x_3 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- 16) Las siguientes matrices determinan aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ para diferentes $n, m > 0$. Para cada una de ellas, halla una base del núcleo, las ecuaciones de la imagen y comprueba la fórmula de las dimensiones ($n = \text{dimensión del núcleo} + \text{dimensión de la imagen}$).

$$i) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad ii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad iii) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad iv) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad v) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$vi) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad vii) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad viii) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad ix) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad x) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$