

Relaciones de equivalencia

1. Considerar la relación sobre $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definida por:

$$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \iff m \cdot n' = m' \cdot n.$$

- (a) Probar que es una relación de equivalencia.
(b) ¿Puedes describir las clases de equivalencia y el conjunto cociente?
2. Consideramos ahora la relación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

$$(m, n)\mathcal{R}(m', n') \iff m \cdot n' = m' \cdot n.$$

- ¿Es esta relación de equivalencia?
3. En el conjunto \mathbb{R} se define la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor,$$

- donde $\lfloor z \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq z\}$ (la parte entera de z). Demuestra que \mathcal{R} es una relación de equivalencia y halla el conjunto cociente.
4. En el conjunto de rectas del plano \mathbb{R}^2 se considera la siguiente relación:

$$r_1\mathcal{R}r_2 \iff r_1 = r_2 \quad \text{ó} \quad r_1 \text{ es paralela a } r_2.$$

- (a) Comprueba que es una relación de equivalencia.
(b) Halla la clase de equivalencia de la recta $2x + 3y - 1 = 0$.
(c) Describe el conjunto cociente hallando un conjunto X de números y una biyección $g : \mathbb{R}^2/R \rightarrow X$.
5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^2$. Se considera la siguiente relación en \mathbb{R} :

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

- Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia. Obtener el conjunto cociente.
6. Sean X e Y conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se considera la siguiente relación en X :

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

- (a) Demuestra que \mathcal{R} es una relación de equivalencia en X .
(b) Obtén el conjunto cociente.
(c) ¿Qué es el conjunto cociente si f es una biyección?
7. Sea A un conjunto y B un subconjunto no vacío de A . En el conjunto $\mathcal{P}(A)$ se considera las siguientes relaciones:

- $X\mathcal{R}_1Y \iff X \cap B = Y \cap B.$
- $X\mathcal{R}_2Y \iff X \cup B = Y \cup B.$
- $X\mathcal{R}_3Y \iff X \setminus B = Y \setminus B.$

Estudia si son relaciones de equivalencia y, en caso afirmativo, describe los conjuntos cocientes.