TEORÍA DE GALOIS

Grado en Matemáticas
Curso 2022–23

Examen
2-12-2022

Apellidos, Nombre: ____

Problema 1	**Problema 2**	**FINAL**
50 puntos	90 puntos	140

Razonar debidamente las respuestas

Sean los polinomios

$$f_1(x) = x^4 + 10x^2 + 20,$$
$$f_2(x) = x^4 - 10x^2 + 20.$$

Problema 1. Para $k = 1, 2$, sea L_k un cuerpo de descomposición de $f_k(x)$ sobre $\mathbb{Q}$.

a) Determinar $[L_k : \mathbb{Q}]$.

b) Determina $\alpha_k \in L_k$ tal que $L_k = \mathbb{Q}(\alpha_k)$.

c) Demostrar que $\mathrm{Gal}(L_k/\mathbb{Q}) \simeq C_4$.

d) Calcular un retículo de subgrupos de $\mathrm{Gal}(L_k/\mathbb{Q})$.

e) Calcular un retículo de subcuerpos de $L_k/\mathbb{Q}$.

Problema 2. Sea L un cuerpo de descomposición de $F(x) = f_1(x)f_2(x)$ sobre $\mathbb{Q}$.

a) Determinar $[L : \mathbb{Q}]$.

b) Calcular una cantidad finita de generadores de L.

c) Describir los elementos de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ en términos de los generadores de L obtenidos en el apartado anterior.

d) Calcular los ordenes de los elementos de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

e) Demostrar que $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ es abeliano.

f) Calcular los subgrupos de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

g) Para cada divisor d del grado $[L : \mathbb{Q}]$ calcular cuántos cuerpos intermedios tiene $L/\mathbb{Q}$ de grado d.

h) Encontrar generadores de los cuerpos intermedios de $L/\mathbb{Q}$.

i) Para $k = 1, 2$ determinar H_k subgrupo de $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ tal que $G/H_k \simeq \mathrm{Gal}(L_k/\mathbb{Q})$.
