CONJUNTOS Y NÚMEROS	Grado en Matemáticas Curso 2022–23	Examen 19-6-2023

Apellidos, Nombre: ______________________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6	FINAL
15 puntos	20 puntos	15 puntos	15 puntos	10 puntos	25 puntos	100

Razonar debidamente las respuestas | **3 horas**

---

1. Se define la sucesión de Fibonacci mediante la recursión:

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = A^n$.

b) Demostrar $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$ para $n \in \mathbb{N}$. (Sugerencia: Utilizar el apartado anterior con A^{2n}).

---

2. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a) Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ no irreducible de grado $n > 1$. Entonces existe un polinomio $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ no constante que divide a $f(x)$ de grado $\leq n/2$.

b) Sea p un primo. Entonces la ecuación $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ solo tiene las soluciones $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

---

3. En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ (recordemos que asumimos $0 \notin \mathbb{N}$) se definen las relaciones:

$$\begin{array}{lcl} aSb & \Longleftrightarrow & a+b \text{ es múltiplo de } 2 \\ aTb & \Longleftrightarrow & a \cdot b \text{ es múltiplo de } 2 \end{array} \qquad a, b \in \mathbb{N}.$$

a) Estudiar si las relaciones S y T son de orden o equivalencia.

b) Para las posibles relaciones de equivalencia señalar las clases de equivalencia y el conjunto cociente; para las posibles de orden, indíquese si se trata de una relación de orden parcial o total.

---

4. Calcular el resto de dividir 7^{7^7} entre 11.

---

5. Determina correctamente (debes definir explícitamente las funciones y comprobar las propiedades de las mismas que te permitan concluir tus afirmaciones) la cardinalidad del conjunto de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0, 1)$ y cortan al eje OX en una coordenada racional.

---

6. Factoriza en polinomios irreducibles el polinomio $f(x) = x^4 + 7x^2 + 1$ sobre $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{F}_2[x]$ y $\mathbb{F}_3[x]$.