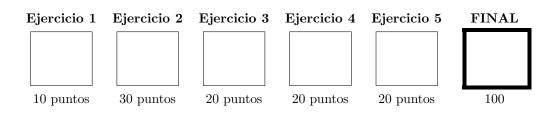
## CONJUNTOS Y NÚMEROS

## Grado en Matemáticas Curso 2022–23

Examen 16-1-2023

Apellidos, Nombre: \_



Razonar debidamente las respuestas

3 horas

1. Demuestra por inducción que para todo  $n \ge 2$  se tiene:

$$\frac{7}{12} \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \,.$$

- 2. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica razonadamente tu respuesta:
- a) Si  $k \equiv \pm 4 \pmod{9}$  entonces  $x^3 + y^3 + z^3 = k$  no tiene solución con  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ .
- b) Dado un cuerpo K. Existen polinomios no nulos  $f(x), g(x) \in K[x]$  tales que  $f(x) \cdot g(x) = 0 \in K[x]$ .
- c) Existe  $n \in \mathbb{N}$  cuya expresión decimal termina en 9 y además  $n^3 + 3^n$  es divisible por 5.
- **3.** Sean A y B dos conjuntos disjuntos.
- a) Sean R y S relaciones de equivalencia en A y en B respectivamente. Determina si la siguiente relación definida para  $x, y \in A \cup B$  también es de equivalencia o no:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad (x, y \in A \land xRy) \lor (x, y \in B \land xSy).$$

b) Determina si la siguiente relación definida para  $x, y \in A \cup B$  es de orden o no:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad (x = y) \lor (x \in A \land y \in B).$$

- **4.** Determina <u>correctamente</u> (debes definir explícitamente las funciones y comprobar las propiedades de las mismas que te permitan concluir tus afirmaciones) la cardinalidad de los siguientes conjuntos:
- a) Sea  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N}, x + y + z = n\}.$
- b) Sea L el conjunto de todas las rectas no verticales que pasan por el punto (0,1).
- **5.** Factoriza en polinomios irreducibles el polinomio  $f(x) = x^4 7x^2 + 1$  sobre  $\mathbb{Q}[x]$ ,  $\mathbb{R}[x]$ ,  $\mathbb{C}[x]$ ,  $\mathbb{F}_2[x]$  y  $\mathbb{F}_3[x]$ .