CONJUNTOS Y NÚMEROS (14-12-2022)	Grado en Matemáticas Curso 2022–23	Hoja nº 8_o

Polinomios

1. Sea K un cuerpo. Demostrar $(K[x])^\times = K^*$. Es decir los polinomios invertibles con coeficientes en un cuerpo son los polinomios constantes no nulos.

2. Sea K un cuerpo.

a) Demostrar el Algoritmo de Euclides en $K[x]$.

b) Demostrar la Identidad de Bezout en $K[x]$.

c) Demostrar el Lema de Gauss en $K[x]$.

3. Sea K un cuerpo y $f(x) \in K[x]$ un polinomio no nulo. Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $f(x)$ es irreducible.

(ii) si $f(x)$ divide al producto $g(x)h(x)$ (para $g(x), h(x) \in K[x]$) entonces $f(x)$ divide a $g(x)$ o $f(x)$ divide a $h(x)$.

4. Sea K un cuerpo. Demuestra que todo polinomio no constante con coeficientes en K se puede escribir de forma única (salvo el orden de los factores y multiplicación por escalares) como producto finito de polinomios irreducibles.
(Ayuda: Considerar el conjunto $S = \{\mathrm{gr}(f) \,:\, f(x) \in K[x] \text{ no se factoriza en producto de irreducibles}\}$).

5. Sea K un cuerpo y $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ con $\mathrm{gr}(f) \in \mathbb{N}$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ son raíces de $f(x)$. Entonces:

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n).$$

6. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Demuestra que existe $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ es primitivo tal que $f(x) = c(f) \cdot g(x)$.

7. Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Demuestra que existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $g(x) = \alpha f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ es primitivo.

8. Reducción módulo un primo: Sea $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Si $p \in \mathbb{N}$ es un primo, denotamos por $\overline{f}(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ a su reducción módulo p. Demuestra:

a) $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$.

b) $\overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g}$.