

Relaciones de Equivalencia

1. Considerar la relación definida sobre \mathbb{R} por:

$$x \sim y \iff x^4 = y^4.$$

Se pide comprobar que es una relación de equivalencia y describir las clases de equivalencia.

2. Consideremos la relación definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

Se pide demostrar que es una relación de equivalencia y describir el conjunto cociente, identificándolo con un subconjunto conocido de \mathbb{R} .

3. Considerar la relación definida sobre el plano \mathbb{R}^2 por:

$$(x, y) \mathcal{R}(x', y') \iff xy = x'y'.$$

Estudiar si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, describir las clases de equivalencia.

4. Indicar cuáles de las siguientes funciones están bien definidas.

a) $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f([m]) = m.$

b) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad g(m) = [m].$

c) $G : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad G([m], [k]) = [m + k].$

d) $H : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad H([m], [k]) = [mk].$

5. Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación

$$(n, m) \mathcal{R}(n', m') \iff \max\{n, m\} = \max\{n', m'\}.$$

a) Demuestra que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

b) Describe la clase de equivalencia del elemento $(2, 2)$.

c) Describe el conjunto cociente.

d) ¿Tienen todas las clases de equivalencia el mismo cardinal? ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

6. Sea F el conjunto de todas las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} . En F se define la siguiente relación:

$$f \mathcal{R} g \iff \text{existe } r \in \mathbb{R}, r > 0 \text{ tal que } f(x) = g(x) \text{ para } |x| < r.$$

Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia sobre F .

7. Considerar las relaciones en \mathbb{Z} definidas por:

$$m \mathcal{R}_1 n \iff 5|(m + 2n),$$

$$m \mathcal{R}_2 n \iff 4|(9m + 3n).$$

a) Decidir si \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son relaciones de equivalencia.

b) En el caso de que lo sean, describir las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes.

8. Sea B un subconjunto finito de un conjunto A . En $\mathcal{P}(A)$ definimos la relación:

$$X\mathcal{R}Y \iff \text{Card}(X \cap B) = \text{Card}(Y \cap B).$$

- a) Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- b) Describir las clases de equivalencias y el conjunto cociente. ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?

9. En $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ se define la siguiente relación: $X\mathcal{R}Y \iff \text{mín } X = \text{mín } Y$.

- a) Demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- b) ¿Cuál es el cardinal de cada una de las clases de equivalencia?
- c) ¿Cuál es el cardinal del conjunto cociente?