ÁLGEBRA LINEAL

(23-11-2021)

Grado en Matemáticas
Curso 2021–22

Hoja nº 6

Aplicaciones Lineales.

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales y, en caso afirmativo, calcular su matriz con respecto ciertas bases en el caso en el que tanto el espacio de salida como de llegada sean de dimensión finita.

(i) $d : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x], \qquad d(p(x)) = p'(x)$

(ii) $f : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow M_2(\mathbb{Q}), \qquad f(x,y) = \begin{pmatrix} 5x & 0 \\ x-3y & x \end{pmatrix}$

(iii) $f : M_n(\mathbb{F}_2) \longrightarrow M_n(\mathbb{F}_2), \qquad f(A) = A^t,\ n = 2,3,4$

(iv) $I : \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f \text{ continua}\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad I(f) = \int_0^1 f(x)dx$

(v) $J : \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f \text{ derivable}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad J(f) = (f'(-1), f(2) + f'(0))$

2. Sean $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ y $g : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales definidas por:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ c-d & 5a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, -c, d-a)$$

(i) Hallar las matrices de f y g respecto a las bases canónicas.

(ii) Comprobar que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$. Hallar la matriz de f y las coordenadas de $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

(iii) Hallar la matriz de g respecto a la base $\mathcal{B}$ en $M_2(\mathbb{R})$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Hallar la matriz de $g \circ f$ respecto a las bases canónica y respecto la base $\mathcal{B}$ en $M_2(\mathbb{R})$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(v) Calcular la matriz de cambio de base entre $\mathcal{B}$ y la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

3. Sea $f : M_2(\mathbb{Q}) \longrightarrow M_2(\mathbb{Q})$ la aplicación lineal dada por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b & b+3c+2d \\ c-d & d \end{pmatrix}$$

(i) Encontrar la matriz de f respecto de la base canónica (tanto en el espacio de partida como en el de llegada).

(ii) Sea A la matriz de f respecto de la base canónica de salida y la base $\mathcal{B}$ de llegada , donde $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Calcular $A \cdot v^t$, donde $v = (1,1,2,1)$ y las coordenadas del vector $f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{B}$.

4. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y f un endomorfismo de V. Demostrar que

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \text{ si y solamente si } n \text{ es par, } f^2 = 0 \text{ y } \dim(\text{Im}\, f) = n/2.$$

5. Sean f y g dos aplicaciones lineales. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(i) $Ker(f) \cap Ker(g) \subset ker(f+g)$.

(ii) Si $Im(f) \cap Im(g) = \{0\}$, entonces $Ker(f) \cap Ker(g) = Ker(f+g)$.

6. Sean $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $W_1 \oplus W_2 = V$. Si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, definimos las funciones

$$\begin{array}{rccc} \pi: & V & \longrightarrow & V \\ & u & \mapsto & \pi(u) = v_1 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rccc} s: & V & \longrightarrow & V \\ & u & \mapsto & s(u) = v_1 - v_2 \end{array}$$

π se llama la proyección sobre W_1 y s la simetría con respecto a W_1 paralela a W_2.

(i) Demuestra que π y s son lineales y que $\pi^2 = \pi$ y $s^2 = id$.

(ii) Si $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ son bases de W_1 y W_2 respectivamente escribe la matriz de π y de s respecto a la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

(iii) Si la suma $V_1 + V_2$ no fuera directa: ¿se podrían definir las aplicaciones π y s de manera similar?

7. Sea V un K-espacio vectorial y f un endomorfismo de V. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(i) Si $f^2 + f + \mathrm{id}_V = 0$, entonces f es un isomorfismo.

(ii) $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(f^m) \subset \mathrm{Ker}(f^{m+1}) \subset \cdots$.

(iii) $f(V) \supseteq f^2(V) \supseteq \cdots \supseteq f^m(V) \supseteq f^{m+1}(V) \supseteq \cdots$.

(iv) $W_1 = \{g \in \mathrm{End}(V) \colon f \circ g = 0\}$ y $W_2 = \{g \in \mathrm{End}(V) \colon g \circ f = 0\}$ son subespacios vectoriales de $\mathrm{End}(E)$, del espacio vectorial de los endomorfismos de V.

8. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Un endomorfismo f de V se llama *proyector* si $f^2 = f$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(i) f es proyector si y solamente si $\mathrm{id}_V - f$ lo es.

(ii) Si f es proyector entonces $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

9. Sea $f : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definido por

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = (a+b) + (c+c')x + (a'+b')x^2$$

(i) Calcular $Ker(f)$.

(ii) Demostrar que la expresión $\overline{f}([v]) = f(v)$ define un isomorfismo entre el espacio cociente $M_{2\times 3}(\mathbb{R})/W$ y $\mathbb{R}_2[x]$, donde $W = Ker(f)$.

(iii) Decidir si $g : M_{2\times 3}(\mathbb{R})/W \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definida por $g([v]) = f(v)$ define una aplicación lineal cuando W es el subespacio generado por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) Probar que la aplicación lineal $f : V_1 \to V_2$ induce una aplicación lineal $\overline{f} : V_1/W \to V_2$ si y solo si $W \subset Ker(f)$.

10. Sea $f : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ el endomorfismo definido por

$$f\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 4c \\ 3a' & 3b' & 4c' \end{pmatrix}$$

y W el subespacio del apartado (iii) del ejercicio anterior. Demostrar que f induce un endomorfismo $\overline{f}$ del espacio cociente $M_{2\times 3}(\mathbb{R})/W$. Calcular su matriz respecto de alguna base.

11. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V.

(i) Demostrar que la aplicación canónica $\pi : V \to V/W$ definida por $\pi(v) = [v]$ es un epimorfismo. Calcular su núcleo y aplicar el primer teorema de isomorfía.

(ii) Demostrar que existen bases de V y de V/W respecto de las cuales la matriz de π es de la forma $(0_{m\times n}|I_m)$ para ciertos enteros m, n. ¿Qué representan m y n?