ÁLGEBRA LINEAL (4-11-2021)	Grado en Matemáticas Curso 2021–22	Hoja nº 4

Espacios vectoriales.

1. Encontrar ecuaciones cartesianas de las siguientes subespacios vectoriales:

(i) $W = \langle(1,2,-1)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) $W = \langle(1,2,-5,3),(2,-1,4,7)\rangle \subset \mathbb{R}^4$.

(iii) $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A \text{ es diagonal } \} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(iv) $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A = A^t\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(v) $W = \{(a-b) + 2ax + bx^2 + (a+2b)x^3 : a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_3[x]$.

2. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 = \langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{R}}$ y $W_2 = \langle v_4, v_5\rangle_{\mathbb{R}}$ con

$$v_1 = (1,-2,-1,3),\ v_2 = (0,2,1,-1),\ v_3 = (-2,6,3,-7),\ v_4 = (1,2,1,1),\ v_5 = (2,0,-1,1).$$

Calcula ecuaciones cartesianas de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

3. Calcular la dimensión y una base de W_1, W_2, W_1+W_2 y $W_1 \cap W_2$, discutir si W_2 es un complementario de W_1 y comprobar que se verifica la fórmula de Grassmann en cada uno de los siguientes casos:

(i) $W_1 = \langle(1,1,-1),(2,0,-1)\rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3$,
$W_2 = \langle(1,0,-1),(2,3,0),(4,3,-2)\rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) $W_1 = \langle(0,1,0,0),(0,1,1,0),(1,0,1,0)\rangle_{\mathbb{F}_2} \subset \mathbb{F}_2^4$,
$W_2 = \langle(1,0,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\rangle_{\mathbb{F}_2} \subset \mathbb{F}_2^4$.

(iii) $W_1 = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x+y+2z+2u = 0,\ 3y+3z-t+2u = 0\} \subset \mathbb{R}^5$,
$W_2 = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \,|\, 2x-y+t = 0,\ 3x-z+t-4u = 0\} \subset \mathbb{R}^5$.

(iv) $W_1 = \langle(1,0,3,1),(-4,3,-3,-7),(2,-1,3,3),(3,-2,3,5)\rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}^4$,
$W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{Q}^4 \,|\, 4x+2y-z-t = 0\} \subset \mathbb{Q}^4$.

(v) $$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \,\middle|\, a+d = 0\right\} \subset M_2(\mathbb{C}),$$
$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1/2 \\ 1 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -3/2 & 0\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{C}} \subset M_2(\mathbb{C}).$$

4. Decir cuáles de los siguientes pares de subespacios se suman directamente y cuál es su suma (directa o no) en cada caso.

(i) $W_1 = \{A \in M_n(\mathbb{R})\colon A = A^t\}$ y $W_2 = \{A \in M_n(\mathbb{R})\colon A = -A^t\}$.

(ii) $W_1 = \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}$ y $W_2 = \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \mid\, : f(-x) = -f(x)\}$.

(iii) $W_1 = \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \,|\, f(x) = 0, x \geq 0\}$ y $W_2 = \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \,|\, : f(x) = 0, x \leq 0\}$.

5. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$:

$$W_1 = \langle 8 - 10x + x^2 + x^3, 1 + x \rangle \quad \text{y} \quad W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|\, p(1) = p(2) = 0\}.$$

Hallar una base de cada uno de los siguientes subespacios: W_2, un complementario de W_1, $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

6. Se consideran los subespacios W_1 y W_2 del espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(\lambda + \gamma, \mu + \gamma, \lambda + \mu + 2\gamma) \,:\, \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}\},$$
$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Calcular una base de $W_1 + W_2$ y las coordenadas de $(2, 3, 5)$ respecto dicha base.

7. Se consideran los subespacios vectoriales W_1 y W_2 de $\mathbb{R}^4$ siguientes

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 = x_2 = x_3\},$$
$$W_2 = \{(\lambda + \mu + \beta, \lambda + \mu, \lambda, \lambda + \beta) \,:\, \lambda, \mu, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

¿Está W_2 contenido en W_1? En caso negativo, calcular $W_1 \cap W_2$.

8. Sea W_1, W_2, W_3 subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$ de dimensión 2. Calcular la dimension de $W_2 + W_3$ sabiendo que $W_2 \neq W_3$ y que $W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$.

9. Sean W_1, W_2 y W_3 subespacios de un espacio vectorial V. Demostrar o dar contraejemplos de las siguientes afirmaciones.

(i) $W_1 \cap (W_2 + W_3) = (W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3)$.

(ii) $W_1 + (W_2 \cap W_3) = (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$.

(iii) $\dim(W_1 \cap (W_2 + W_3)) = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_3 \cap W_2)$.

10. Sea V un K-espacio vectorial y $W_1, \ldots, W_n \subset V$ subespacios vectoriales que están en suma directa. Demostrar que entonces

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} W_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(W_i).$$

11. Sea V un K-espacio vectorial y $W_1, \ldots, W_n \subset V$ subespacios vectoriales. Demostrar:
$V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$ si y sólo si

(i) $V = \sum_{i=1}^{n} W_i$.

(ii) Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene

$$W_i \cap \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} W_j = \{0_V\}.$$

12. Dar un ejemplo de un espacio vectorial V y una familia infinita de subespacios $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que se sumen directamente, es decir que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} W_i = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} W_i.$$

13. Sea $W \subset \mathbb{K}^n$ un subespacio vectorial y definimos

$$W^{\perp} = \{u \in \mathbb{K}^n \mid u \cdot v^t = 0, \forall v \in W\}.$$

Demostrar:

(i) $W^{\perp}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.

(ii) $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = n$.

(iii) $\mathbb{K}^n = W \oplus W^{\perp}$.

(iv) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

(v) Sean $W_1, W_2 \subset \mathbb{K}^n$ subespacios vectorial.

   (a) Si $W_1 \subseteq W_2$, entonces $W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$.

   (c) $(W_1 + W_2)^{\perp} \subseteq W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

   (c) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

   (d) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

14. Dados los subespacios vectoriales $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ definidos por

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_1 + 5x_2,\ x_2 + 3x_3, -x_4, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}, \\ W_2 &= \langle (0,0,1,0), (6,4,0,0) \rangle_{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

se pide calcular una base y la dimensión de los siguientes espacios vectoriales cociente:

$$\mathbb{R}^4/(W_1 \cap W_2)\,, \qquad \mathbb{R}^4/(W_1 + W_2)\,, \qquad \mathbb{R}^4/W_1\,, \qquad (W_1 + W_2)/(W_1 \cap W_2).$$

15. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0\,,\ z + t = 0\}.$$

Calcular una base del espacio vectorial cociente $\mathbb{R}^4/W$ y encontrar las cordenadas de los vectores

$$[(2,-2,0,0)] \quad \text{y} \quad [(3,4,0,0)] \in \mathbb{R}^4/W$$

en dicha base.

16. Sea W el subespacio vectorial de $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ definido por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q}) \,\middle|\, \begin{array}{c} a + b = 0 \\ a' + b' = 0 \\ c + c' = 0 \end{array} \right\}.$$

Encontrar una base de $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})/W$ y las coordenadas del vector $[v]$, con $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, respecto a dicha base.