ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2020–21

Examen
11-6-2021

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	TOTAL
20	30	20	30	100

Los apartados de cada ejercicio no necesariamente tienen la misma puntuación.

⋄⋄⋄⋄⋄⋄ Razonar debidamente las respuestas ⋄⋄⋄⋄⋄⋄

Dispones de 3 horas para hacer el examen.

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sean $f(x,y) = 2x + 3y$, $g(x,y) = -x$ y $h(x,y) = 4x + 23y$. Entonces $f, g, h \in (\mathbb{R}^2)^*$ son linealmente independientes.

(ii) Existe un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}[x]$ tal que $[1] = [x]$ en el espacio vectorial cociente $\mathbb{R}[x]/W$.

(iii) El conjunto $\{p(x) \in \mathbb{R}_9[x] \,:\, p(x) = p'(x) = p''(x)\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_9[x]$, donde $p'(x)$ y $p''(x)$ denotan la derivada primera y segunda del polinomio $p(x)$ respectivamente.

(iv) Sea $W = \mathcal{L}\{(1,1,-2), (-1,2,-1), (0,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Entonces la ecuación implícita (respecto a las coordenadas en la base canónica) son $x + y - z = 0$.

Problema 2. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2x3}(\mathbb{R})$ la aplicación definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & c & 0 \\ 0 & a-d & c \end{pmatrix}$$

(i) Demostrar que f es una aplicación lineal.

(ii) Calcular la matriz de f con respecto a las bases canónicas de los espacios vectoriales correspondientes.

(iii) Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}'$ la base canónica de $M_{2x3}(\mathbb{R})$. Calcula $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f)$.

(iv) Calcular una base de $\mathrm{Ker}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

(v) Calcular las ecuaciones cartesianas (con respecto a la base canónica correspondiente) de $\mathrm{Ker}(f)$ y de $Im(f)$.

(vi) Decide si f es un monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

(vii) Decide si $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$ y si $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f)$.

Problema 3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 2$. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_3[x]$ siguientes:

$$W_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,:\, xp'(x) - \alpha p(x) = 0\} \quad \text{y} \quad W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,:\, x^2p''(x) - xp'(x) = 0\},$$

donde $p'(x)$ y $p''(x)$ denotan la derivada primera y segunda del polinomio $p(x)$ respectivamente.

(i) Determinar en función de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 2$, la dimensión y una base de W_1.

(ii) Determinar la dimensión y una base de W_2.

(iii) Determinar en función de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 2$, la dimensión y una base de $W_1 + W_2$ y de $W_1 \cap W_2$.

Problema 4. Se considera $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 14 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula:

(i) El polinomio característico de f y comprueba que los autovalores de f son 2 y 3.

(ii) Una base del subespacio propio y el diagramas de Jordan para cada uno de los autovalores de f.

(iii) El polinomio mínimo de f.

(iv) Una base de Jordan para f y su correspondiente forma de Jordan J.

Responde a las siguientes preguntas:

(a) ¿f es diagonalizable?

(b) ¿Cuántos autovectores tiene una base de Jordan de f?

(c) Si P es la matriz de cambio de la base de Jordan calculada anteriormente a la base canónica ¿Qué relación hay entre las matrices A, J y P?