ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2020–2021

Examen
5-2-2021

APELLIDOS, NOMBRE: ____

Ejercicio 1	**Ejercicio 2**	**Ejercicio 3**	**Ejercicio 4**	**Ejercicio 5**	**TOTAL**
20	20	20	20	20	100

Los apartados de cada ejercicio no necesariamente tienen la misma puntuación.

⋄⋄⋄⋄⋄⋄ Razonar debídamente las respuestas ⋄⋄⋄⋄⋄⋄

Dispones de 3 horas para hacer el examen.

Ejercicio 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
Sea K un cuerpo y V un K-espacio vectorial de dimensión finita.

(i) Si $f : V \to K$ es una aplicación lineal no nula, entonces f es un epimorfismo y $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) - 1$.

(ii) Sean f y g endomorfismos de V. Si α es un autovalor de f y β es un autovalor de g entonces $\alpha + \beta$ es un autovalor del enfomorfismo $f + g$.

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Dados los subespacios vectoriales:

$$
\begin{aligned}
&U = \mathcal{L}(\{x^2 + 2x, -x^2 + x, x^2 + x\}),\\
&V = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}_3[x] \,:\, a_1 = a_3 = 0,\, a_2 = -\beta,\, a_0 = \alpha + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},\\
&W = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}_3[x] \,:\, a_2 + a_3 = 2a_2 - a_3 = 0\},
\end{aligned}
$$

calcular:

(i) Bases de $U \cap W$ y de $U + W$ ¿Son U y W complementarios?

(ii) Una base de $W \cap V$.

(iii) Unas ecuaciones cartesianas de $U + V$ y del subespacio vectorial $(U + V)/(U \cap V)$ del espacio cociente $\mathbb{R}_3[x]/(U \cap V)$.

Ejercicio 3. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. En su espacio dual V^* se consideran las formas lineales:

$$\omega_1(p(x)) = p''(1), \quad \omega_2(p(x)) = p(1), \quad \omega_3(p(x)) = p'(0), \quad \omega_4(p(x)) = p(-1),$$

para $p(x) \in V$ y donde $p'(x)$ y $p''(x)$ denotan la derivada y segunda derivada de $p(x)$ respectivamente.

(i) Demostrar que $\mathcal{C} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ es una base de V^*.

(ii) Calcular la base $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$.

(iii) Usando los resultados anteriores, calcular un polinomio $p(x) \in V$ que verifique:

$$p''(1) = 2, \quad p(1) = 0, \quad p'(0) = 0, \quad p(-1) = 2.$$

Ejercicio 4. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{L}(\{(1,1,1)\}) \\ W &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z=0\}. \end{aligned}$$

Determinar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ de forma que $\mathrm{Ker}(f) = U$ e $\mathrm{Im}(f) = W$.

Ejercicio 5. Consideramos la matriz con coeficientes racionales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Demuestra que los autovalores de A son $\{0, 1\}$.

(ii) Sea $\alpha \in \{0, 1\}$. Calcula:

  (a) Una base de los autovectores de autovalor α.

  (b) El diagramas de Jordan asociado a α.

(iii) ¿Es A diagonalizable?

(iv) Determina si A es jordanizable. En caso afirmativo determina la forma canónica de Jordan J de A.

(v) Si J tiene coeficientes racionales, encuentra una base de $\mathbb{Q}^4$ respecto a la cual el endomorfismo de $\mathbb{Q}^4$ definido por A tenga matriz de Jordan J y una matriz $P \in GL_4(\mathbb{Q})$ tal que $AP = PJ$.

(vi) Calcula el polinomio característico y mínimo de A.

(vii) Calcula A^{20}.
