

Aplicaciones Lineales.

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales y, en caso afirmativo, calcular su matriz con respecto a las bases canónicas en el caso en el que tanto el espacio de salida como de llegada sean de dimensión finita.

- (i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x, y - x)$ (ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$
(iii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ (iv) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\sin x, y)$
(v) $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$, $f(x, y) = (xy, x)$ (vi) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(x) = (2x, 0)$
(vii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ (viii) $f : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2$, $f(x, y) = x + y$
(ix) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^3$, $f(x) = (2x, 0, x/2)$ (x) $d : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$, $d(p(x)) = p'(x)$
(xi) $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{Q})$, $f(x, y) = \begin{pmatrix} 5x & 0 \\ x - 3y & x \end{pmatrix}$ (xii) $f : M_n(\mathbb{F}_2) \rightarrow M_n(\mathbb{F}_2)$, $f(A) = A^t$, $n = 2, 3, 4$
(xiii) $I : \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ continua}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $I(f) = \int_0^1 f(x) dx$
(xiv) $J : \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ derivable}\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $J(f) = (f'(-1), f(2) + f'(0))$

2. (i) Halla $T(1, 0)$ si $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal para la que sabemos que $T(3, 1) = (1, 2)$ y $T(-1, 0) = (1, 1)$.

(ii) Lo mismo sabiendo que $T(4, 1) = (1, 1)$ y $T(1, 1) = (3, -2)$.

3. Decidir en cada caso si existe una aplicación lineal con las propiedades que se indican. En caso afirmativo dar la matriz con respecto a las bases canónicas.

(i) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, 1, 1) = (0, 1)$.

(ii) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(1, 1) = (1, 0)$, $T(2, -1) = (0, 1)$ y $T(-3, 2) = (1, 1)$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2, x_3 - x_1, x_3)$. Determinar la imagen por T del plano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

5. Sea $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación definida por $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b)x^2 + (c + d)x$.

(i) Demostrar que f es lineal.

(ii) Hallar la matriz de f respecto a la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$ y la base $\{x^2 + 1, x^2 + 3x, 5\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

6. Sean $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ y $g : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ las aplicaciones lineales definidas por:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ c - d & 5a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad g \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, -c, d - a)$$

(i) Hallar las matrices de f y g respecto a las bases canónicas.

(ii) Comprobar que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$. Hallar la matriz de f y las coordenadas de $f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ respecto a la base \mathcal{B} .

(iii) Hallar la matriz de g respecto a la base \mathcal{B} en $M_2(\mathbb{R})$ y la base canónica de \mathbb{R}^3 .

(iv) Hallar la matriz de $g \circ f$ respecto a las bases canónica y respecto a la base \mathcal{B} en $M_2(\mathbb{R})$ y la base canónica de \mathbb{R}^3 .

(v) Calcular la matriz de cambio de base entre \mathcal{B} y la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

(vi) Relacionar las diferentes matrices obtenidas.

7. En \mathbb{R}^3 se consideran las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \{(2, 1, 1), (1, 1, 1), (1, -1, 1)\}.$$

- (i) Calcular la matriz de cambio de base de \mathcal{B}_2 a \mathcal{B}_1 .
- (ii) Calcular las coordenadas en la base \mathcal{B}_1 del vector cuyas coordenadas en la base \mathcal{B}_2 son $(3, -2, 1)$.

8. Sea $f : M_2(\mathbb{Q}) \rightarrow M_2(\mathbb{Q})$ la aplicación lineal dada por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 5b & b + 3c + 2d \\ c - d & d \end{pmatrix}$$

- (i) Encontrar la matriz de f respecto de la base canónica (tanto en el espacio de partida como en el de llegada).
- (ii) Sea A la matriz de f respecto de la base canónica de salida y la base \mathcal{B} de llegada, donde \mathcal{B} :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (iii) Calcular $A \cdot v^t$, donde $v = (1, 1, 2, 1)$.
- (iv) Encontrar las coordenadas del vector $f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de \mathcal{B} .

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$

- (i) Hallar la matriz de T en la base canónica y la matriz de T respecto a la base $\{(1, 0, 1), (-1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$.
- (ii) Demostrar que T es un isomorfismo y dar una expresión para T^{-1} .

10. Sean v_1, v_2 y v_3 tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V . Demostrar:

- (i) Los vectores $u_1 = v_1 + v_2, u_2 = v_2 + v_3$ y $u_3 = v_3 + v_1$ son linealmente independientes.
- (ii) Los vectores $w_1 = v_1, w_2 = v_1 + v_2$ y $w_3 = v_1 + v_2 + v_3$ son linealmente independientes.
- (iii) Tres vectores cualesquiera u_1, u_2, u_3 del subespacio $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son independientes si y sólo si sus coordenadas respecto a la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ son vectores independientes de \mathbb{R}^3 .

11. Sean $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $W_1 \oplus W_2 = V$. Si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, definimos las funciones

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 : V & \longrightarrow & V \\ u & \mapsto & \pi_1(u) = v_1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} s : V & \longrightarrow & V \\ u & \mapsto & s(u) = v_1 - v_2 \end{array}$$

- (i) Demuestra que π_1 y s son lineales y que $\pi_1^2 = \pi_1$ y $s^2 = id$.
- (ii) Si $\mathcal{B}_1 = \{w_1, \dots, w_m\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_{m+1}, \dots, w_n\}$ son bases de W_1 y W_2 respectivamente escribe la matriz de π_1 y de s respecto a la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.
- (iii) Si la suma $V_1 + V_2$ no fuera directa: ¿se podrían definir las aplicaciones π_1 y s de manera similar?