ÁLGEBRA LINEAL

(19-10-2020)

Grado en Matemáticas
Curso 2020–21

Hoja nº 4

Espacios vectoriales.

1. Demostrar que $\mathbb{R}^3 = \langle (1,1,0) \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle (1,0,1),(1,1,1),(2,1,2) \rangle_{\mathbb{R}}$.

2. Encontrar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbb{R}^3 = \langle (1,-1,1),(0,2,-2) \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$.

3. Calcular la dimensión y una base de W_1, W_2, W_1+W_2 y $W_1 \cap W_2$, discutir si W_2 es un complementario de W_1 y comprobar que se verifica la fórmula de Grassmann en cada uno de los siguientes casos:

(i) $W_1 = \langle (1,1,-1),(2,0,-1) \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3$,
$W_2 = \langle (1,0,-1),(2,3,0),(4,3,-2) \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) $W_1 = \langle (0,1,0,0),(0,1,1,0),(1,0,1,0) \rangle_{\mathbb{F}_2} \subset \mathbb{F}_2^4$,
$W_2 = \langle (1,0,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1) \rangle_{\mathbb{F}_2} \subset \mathbb{F}_2^4$.

(iii) $W_1 = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \mid x+y+2z+2u=0,\ 3y+3z-t+2u=0\} \subset \mathbb{R}^5$,
$W_2 = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x-y+t=0,\ 3x-z+t-4u=0\} \subset \mathbb{R}^5$.

(iv) $W_1 = \langle (1,0,3,1),(-4,3,-3,-7),(2,-1,3,3),(3,-2,3,5) \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}^4$,
$W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{Q}^4 \mid 4x+2y-z-t=0\} \subset \mathbb{Q}^4$.

(v) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a+d=0 \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$,
$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1/2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} \subset M_2(\mathbb{C})$.

4. Sea W_1, W_2, W_3 subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$ de dimensión 2. Calcular la dimension de $W_2 + W_3$ sabiendo que $W_2 \neq W_3$ y que $W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{(0,0,0,0,0)\}$.

5. Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial. Definimos el subespacio ortogonal a W como:

$$W^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \cdot v^t = 0, \forall v \in W\}.$$

Demostrar:

(i) $W^{\perp}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Sean $u_1, \ldots, u_m \in W$ un sistema de generadores de W y A la matriz que tiene estos vectores por filas, entonces $W^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot u^t = 0\}$.

(iii) $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = n$.

(iv) $K^n = W \oplus W^{\perp}$.

(v) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

(vi) Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ otro subespacio vectorial. Entonces

$$(W \cap V)^{\perp} = W^{\perp} + V^{\perp} \qquad \text{y} \qquad (W+V)^{\perp} = W^{\perp} \cap V^{\perp}.$$

(vii) Cualquier subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con n variables.

6. Sea $W = \langle (1,2,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Describe W como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

7. Demuestra que los siguientes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ se pueden describir como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas y encuentra dichas ecuaciones.

(i) $V_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A \text{ es diagonal } \}$.

(ii) $V_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A = A^t\}$.

8. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1,2,-5,3)$ y $(2,-1,4,7)$. Da las ecuaciones de W.

9. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ y $W_2 = \langle v_4, v_5 \rangle_{\mathbb{R}}$ con

$$v_1 = (1,-2,-1,3),\ v_2 = (0,2,1,-1),\ v_3 = (-2,6,3,-7),\ v_4 = (1,2,1,1),\ v_5 = (2,0,-1,1).$$

Da las ecuaciones de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

10. Sea $\mathbb{R}_3[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \,:\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, y considera el subespacio $W = \{(a-b) + 2ax + bx^2 + (a+2b)x^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$. Da las ecuaciones de W y las de un complementario.

11. Dados los subespacios vectoriales $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ definidos por

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x_1 + 5x_2,\ x_2 + 3x_3, -x_4, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}, \\ W_2 &= \langle (0,0,1,0), (6,4,0,0) \rangle_{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

se pide calcular una base y la dimensión de los siguientes espacios vectoriales cociente:

$$\mathbb{R}^4/(W_1 \cap W_2), \qquad \mathbb{R}^4/(W_1 + W_2), \qquad \mathbb{R}^4/W_1, \qquad (W_1 + W_2)/(W_1 \cap W_2).$$

12. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0,\ z + t = 0\}.$$

Calcular una base del espacio vectorial cociente $\mathbb{R}^4/W$ y encontrar las cordenadas de los vectores

$$[(2,-2,0,0)] \quad \text{y} \quad [(3,4,0,0)] \in \mathbb{R}^4/W$$

en dicha base.

13. Sea W el subespacio vectorial de $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ definido por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q}) \,\middle|\, \begin{array}{c} a + b = 0 \\ a' + b' = 0 \\ c + c' = 0 \end{array} \right\}$$

Encontrar una base de $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})/W$ y las coordenadas del vector $[v]$, con $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, respecto a dicha base.