

## Espacios vectoriales.

1. En  $\mathbb{R}^2$  se define la operación suma habitual y el producto  $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por un escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  mediante:

$$(i) \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, 0).$$

$$(ii) \alpha \cdot (x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y).$$

$$(iii) \alpha \cdot (x, y) = (x, y).$$

$$(iv) \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, y).$$

Decidir en cada caso si  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

2. En  $\mathbb{R}^2$  se define la operación suma habitual y el producto  $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por un escalar  $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$  mediante:  $\alpha \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$ . Decidir si  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.

3. Sea  $K$  un cuerpo y  $(V, +, \cdot)$  un  $K$ -espacio vectorial. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(i) El elemento neutro de un espacio vectorial es único. Lo denotaremos por  $\mathbf{0}_V$ .

(ii) El opuesto de cada elemento en un espacio vectorial es único.

(iii) Sea  $0 \in K$ . Para todo  $u \in V$  se tiene  $0 \cdot u = \mathbf{0}_V$ .

(iv) Sea  $-1 \in K$ . Para todo  $u \in V$  se tiene  $(-1) \cdot u$  es el opuesto de  $u$ .

(v) Para todo  $k \in K$  se tiene  $k \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$ .

4. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales (sobre el cuerpo “obvio” en cada caso):

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x = \sqrt{2}y\},$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid xy + z = x\},$$

$$W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x = 7n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}\},$$

$$W_4 = \{(x, y) \in \mathbb{F}_2^2 \mid x = y + 1\},$$

$$W_5 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grado}(p(x)) \text{ par}\},$$

$$W_6 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(5) = 0\},$$

$$W_7 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) \in \mathbb{Z}\},$$

$$W_8 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(x) = p(-x)\},$$

$$W_9 = \{A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R}) \mid \text{rango}(A) = 3\},$$

$$W_{10} = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^2 = 0\},$$

$$W_{11} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\},$$

$$W_{12} = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\},$$

5. Determinar si estos subconjuntos del espacio  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  (también se denota por  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ) formado por las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son  $\mathbb{R}$ -subespacios vectoriales

$$W_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ derivable y } f'(2) = 0\},$$

$$W_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua y } \int_0^1 f(x) dx = 0\},$$

$$W_3 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(\sqrt{2})f(11) = 0\},$$

$$W_4 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(\sqrt{2}) = -f(11)\}.$$

6. Determinar qué subconjuntos son  $\mathbb{R}$ -subespacios vectoriales o  $\mathbb{C}$ -subespacios vectoriales:

$$W_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\},$$

$$W_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 0\},$$

$$W_3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z + 3iw = 0\},$$

$$W_4 = \{(x, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w \in \mathbb{R}\},$$

7. Sea  $W$  el subespacio de  $\mathbb{R}^4$  generado por  $(1, 2, -5, 3)$  y  $(2, -1, 4, 7)$ . Se pide

(i) Determinar si el vector  $(0, 0, -37, -3)$  pertenece a  $W$ .

(ii) Determinar para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  el vector  $(\alpha, \beta, -37, -3) \in W$ .

8. Determina para qué valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  los tres vectores de  $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (3, 1, -4, 6), \quad v_2 = (1, 1, 4, 4), \quad v_3 = (1, 0, -4, \alpha)$$

son linealmente dependientes.

9. Determina si los vectores  $u_1 = (10, -4, 4, 10)$  y  $u_2 = (-8, -2, 9, -15)$  pertenecen al subespacio vectorial  $W \subset \mathbb{R}^4$  generado por  $v_1 = (2, 1, 1, 4)$ ,  $v_2 = (-4, -3, 0, -7)$  y  $v_3 = (0, 0, -1, -1)$ .

10. Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $K$ . Demuestra que dos vectores  $v_1$  y  $v_2$  en  $V \setminus \{\vec{0}\}$  son linealmente dependientes si y sólo si existe  $k \in K$  tal que  $v_2 = kv_1$ .

11. Considera el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de las funciones continuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Demuestra que las funciones  $f_1(x) = \cos(x)$  y  $f_2(x) = \sen(x)$  son linealmente independientes.

12. Demuestra que si  $V$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $V = \{\vec{0}\}$ , o  $V$  es una recta que pasa por el origen, o  $V$  es un plano que pasa por el origen o  $V = \mathbb{R}^3$ .

13. Calcula la dimensión y da una base para cada uno de los subespacios vectoriales del ejercicio 4.

14. Construye una base de  $\mathbb{R}^4$  que contenga a los vectores  $(2, -2, 3, 1)$  y  $(-1, 4, -6, -2)$ .

15. Sea  $\mathbb{R}_3[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ .

(i) Demuestra que  $\mathcal{B} = \{x^3 + 4x, 3x^2 + 4, 6x, 6\}$  es una base de  $\mathbb{R}_3[x]$  y calcular las coordenadas de  $p(x) = 2 + 2x - x^2 - x^3$  en  $\mathcal{B}$ .

(ii) Sea  $W = \{(a-b) + 2ax + bx^2 + (a+2b)x^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$ . Demuestra que  $W$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}_3[x]$ . Calcular una base de  $W$ .

16. Sea  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$ .

(i) Demostrar que  $\mathcal{B}$  es una base de  $M_2(\mathbb{R})$ .

(ii) Dar las coordenadas de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  en la base  $\mathcal{B}$  y en la base canónica de  $M_2(\mathbb{R})$ .