ÁLGEBRA LINEAL (10-12-2020)	**Grado en Matemáticas** **Curso 2020–21**	**Hoja nº 10**

Forma canónica de Jordan. Aplicaciones.

1. Consideramos las matrices con coeficientes reales siguientes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 & 3 \\ -4 & 2 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_9 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Determina la forma canónica de Jordan J_i (sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ en el que el polinomio característico descomponga en factores lineales) de cada una de las matrices A_i y da en cada caso la base de Jordan y el polinomio mínimo.

(ii) En los casos en los que la forma de Jordan tenga coeficientes en $\mathbb{C}$, encuentra J_i^{real}, la forma canónica real de A_i, una base de $\mathbb{R}^4$ respecto a la cual el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ definido por A_i tenga matriz J_i^{real} y una matriz invertible Q_i tal que $AQ_i = Q_i J_i^{real}$.

2. Encuentra todas las posibles formas de Jordan (que representen endomorfismos distintos de $\mathbb{R}^n$) para matrices A de tamaño $n \times n$ que satisfagan las condiciones indicadas ($p_A(x)$ es el polinomio característico y $m_A(x)$ el polinomio mínimo).

(i) $p_A(x) = (x-1)^3(x-2)^3(x-3)^3, m_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$;

(ii) $p_A(x) = m_A(x) = (x-1)^4(x-2)^2$;

(iii) $p_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

(iv) $n = 6, m_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)$;

(v) $n = 3, (A-I)(A-2I)(A-3I) = 0$.

3. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión n. Diremos que f es nilpotente si existe un entero $k \geq 1$ tal que $f^k = 0$. Llamaremos $G(f) = min\{k \geq 1 \mid f^k = 0\}$.

(i) Demuestra que $G(f) \leq n$.

(ii) Demuestra que si f es nilpotente y $G(f) = n = dim(V)$, entonces existe una base de Jordan $\mathcal{B}_J$ de V tal que la matriz de f en esa base es un bloque de Jordan de orden n y autovalor 0, es decir: $M_{\mathcal{B}_J}(f) = J(0, n)$.

(iii) ¿Qué nos dice en general $G(f)$ sobre la forma de Jordan de f?

4. Sea $J = J(\lambda, n)$ un bloque de Jordan de orden n y autovalor λ.

(i) Demostrar que para $k = 1, \ldots, n$ se tiene, para matrices $\mathbf{0}$ de tamaños adecuados,

$$J^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

(Sugerencia: $J = \lambda I_n + N_n$ donde $N_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y usar el binomio de Newton viendo que I_n y N_n conmutan).

(ii) Determinar el menor entero k tal que $(J - \lambda I_n)^k = \mathbf{0}$.

5. Definimos la exponencial de una matriz real, suponiendo que las series involucradas convergen, como

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

(i) Comprueba que $exp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

(ii) Calcula $exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ y $exp \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

(iii) Encuentra cambios de base que permitan escribir las aplicaciones lineales dadas por las matrices $A = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en una de las formas indicadas en (ii); utiliza esto para calcular $exp(A)$ y $exp(B)$.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Se dice que un endomorfismo $s : V \longrightarrow V$ es una simetría si $s^2 = id_V$ y que $\pi : V \longrightarrow V$ es una proyección si $\pi^2 = \pi$. Se pide:

(i) Decidir de manera razonada cómo son los polinomios mínimos de s y de π.

(ii) Usando el apartado anterior, demostrar que s y π son diagonalizables.

(iii) Demostrar que para s (resp. π) existen $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $W_1 \oplus W_2 = V$ y si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, entonces $s(u) = v_1 - v_2$ (resp. $\pi(u) = v_1$). Observar que W_1 y W_2 dependen de s (resp. π).

7. En un bosque maderero, los árboles están clasificados en dos tamaños. Un censo que se hace cada 5 años reclasifica un 30 % de los árboles de tamaño menor, que pasan a ser de tamaño grande. Entre cada dos censos se corta un 10 % de los árboles de tamaño grande y se repuebla con el mismo número de árboles de tamaño pequeño. ¿Aumenta el número de árboles con el tiempo? Si inicialmente había 1000 árboles de tamaño pequeño y ninguno grande, ¿cuántos árboles de tamaño grande hay a los 20 años? (**Sugerencia:** si x_n(resp. y_n) representa el número de árboles pequeños(resp. grandes) después de n períodos de 5 años, se tiene $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ para una cierta matriz A que convendrá diagonalizar).

8. Supongamos que tenemos dos depósitos de igual volumen con agua comunicados por un doble conducto por el que circula el agua como sigue:

NaCl	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	NaCl

Inicialmente, en el primer depósito hay NaCl disuelto al 1 %, y en el segundo hay NaCl disuleto al 2 %. Cada minuto pasa un 5 % del volumen del primer depósito al segundo y viceversa. Decide de manera razonada la concentración de NaCl que habrá en cada uno de los depósitos después de 120 minutos. ¿Qué prevés que suceda a largo plazo?

9. Los *dusky-footed wood rats* son un tipo de roedor común en los bosques de California, cuyo depredador natural es el buho moteado. Denotamos por O_k la población de búhos después de k meses y por R_k la población de roedores después de k-meses. Supongamos que

$$\begin{aligned} O_{k+1} &= \quad 0{,}5 O_k + 0{,}4 R_k \\ R_{k+1} &= \quad -p O_k + 1{,}1 R_k \end{aligned}$$

donce p es una constante positiva. El sumando $0{,}5O_k$ indica que si no hay roedores, la tasa de supervivencia de los búhos es del 50 % al mes, mientras que el sumando $1{,}1R_k$ nos dice que en ausencia de búhos, los roedores crecerían a un ritmo del 10 % al mes. El término $0{,}4R_k$ indica el crecimiento de los búhos en presencia de los roedores, y el término $-pO_k$ mide la desaparición de roedores debido a la caza por parte de los búhos.

(i) Determina la evolución de las dos poblaciones a largo plazo si $p = 0{,}104$.

(ii) Determina la evolución de las dos poblaciones a largo plazo si $p = 0{,}2$. ¿Crece la población de búhos? ¿Y la de roedores?

(iii) Determina un valor de p para el que el número de individuos de ambas poblaciones se estabilice a largo plazo. ¿Cuál será entonces la proporción entre ambas poblaciones? Se puede probar que este *equilibrio* entre ambas poblaciones es inestable (cualquier cambio menor en alguno de los datos provoca decrecimento o crecimiento de ambas poblaciones a largo plazo).