ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2020–21

Examen
27-11-2020

Apellidos, Nombre: ______________________________

	Ejercicio 1	Ejercicio 2	FINAL
Razonar debidamente las respuestas ◇◇◇			
	30 puntos	70 puntos	100

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sea $f : M_2(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ una aplicación lineal. Entonces f no puede ser inyectiva.

(ii) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finito. Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son dos bases de V, denotamos por $\mathcal{B}_1^*$ y $\mathcal{B}_2^*$ las bases duales de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente. Entonces

$$C_{\mathcal{B}_1^*\mathcal{B}_2^*} = ((C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2})^t)^{-1}.$$

(iii) Sea $W = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) = p(-x)\}$, entonces el espacio cociente $\mathbb{R}[x]/W$ tiene dimensión finita.

Problema 2. Sean $f_1, f_2 : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ las aplicaciones definidas por

$$f_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+b+c+d \qquad \text{y} \qquad f_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c-a.$$

Definimos $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(f_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - f_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, f_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right).$$

(i) Demostrar que f es una aplicación lineal.

(ii) Calcular las matrices de f_1, f_2 y f con respecto a las bases canónicas de los espacios vectoriales correspondientes.

(iii) Sea $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ y $\mathcal{B}_\alpha = \{\alpha\}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \neq 0$. Calcular $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_\alpha}(f_1)$ y las coordenadas de $f_1 \in (M_2(\mathbb{R}))^*$ con respecto a la base dual de $\mathcal{B}$.

(iv) Calcular una base de cada uno de los subespacios vectoriales siguientes:

$$Ker(f), \qquad Im(f), \quad Ker(f) \cap \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad Im(f) \cap \left\langle f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(v) Calcular las ecuaciones cartesianas de un subespacio complementario de $Ker(f)$.

(vi) Decide si f es un monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

(vii) Calcular la matriz del isomorfismo canónico $\overline{f} : M_2(\mathbb{R})/Ker(f) \longrightarrow Im(f)$ con respecto a algunas bases.