1. Encontrar condiciones para que un entero k NO pueda ser la suma de tres cubos enteros:

$$x^3 + y^3 + z^3 = k, \quad x, y, z \in \mathbb{Z}.$$

2. Demostrar que no existen triángulos rectángulos con lados racionales y área 1.

Ayuda: Sean $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a > b$, tales que $a^2 + b^2 = c^2$ y $\frac{ab}{2} = 1$. Entonces $(x, y) = \left(\frac{c}{2}, \frac{a^2 - b^2}{4}\right)$ satisface $y^2 = x^4 - 1$. Homogeneizando la ecuación: $(x, y) = \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$: $Z^2Y^2 + Z^4 = X^4$. Sea $W = YZ$, entonces $W^2 + Z^4 = X^4$. Por último aplicar *Descenso infinito.*

3. Sea $c \in \mathbb{Z}$ tal que existen $x, y \in \mathbb{Q}$ cumpliendo $y^2 - x^3 = c$.

- Demostrar que entonces $(X, Y) = \left(\frac{x^4 - 8cx}{4y^2}, \frac{-x^6 - 20cx^3 + 8c^2}{8y^3}\right)$ satisface la misma ecuación: $Y^2 - X^3 = c$.
- Describir de donde proviene el punto (X, Y).

4. Demostrar el último teorema de Fermat para $n = 3$ a través de calcular las soluciones enteras de $y^2 + 432 = x^3$.

5. Calcular las soluciones enteras de $y^2 - y = x^3$.

6. Calcular las soluciones enteras de $y^2 = x^3 + 16$.

7. Fijado un entero $k \in \mathbb{Z}$ definimos la ecuación diofántica $C_k : x^3 + y^3 = k$. Calcular $C_k(\mathbb{Z})$ para $|k| \leq 100$.

8. Definimos la ecuación diofántica $C : x^3 + y^3 = 7$.

- Calcular $C(\mathbb{Z})$.
- Demostrar $\#C(\mathbb{Q}) > 11$.

9. Fijado un entero $k \in \mathbb{Z}$ definimos la ecuación diofántica $C_k : y^2 = x^k - 1$. Calcular $C_k(\mathbb{Z})$ para $k \in \{4, \ldots, 20\}$.

10. Fijado un entero $k \in \mathbb{Z}$ definimos la ecuación diofántica $C_k : x^3 + y^3 = k$. ¿Puede ser $\#C_k(\mathbb{Z}) = 2n + 1$ para $n \neq 0$?

11. Encontrar todas las ternas de números enteros consecutivos tales que si se suma una unidad al producto de ellos se obtiene un cuadrado perfecto. Es decir, $x, y \in \mathbb{Z}$, tales que $1 + x(x + 1)(x + 2) = y^2$.

12. Sabemos:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = 1 \iff p \equiv 1 \pmod 4 \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{2}{p}\right) = 1 \iff p \equiv \pm 1 \pmod 8$$

Generalizar estos resultados para $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \leq 20$:

$$\left(\frac{n}{p}\right) = 1 \iff p \equiv ? \pmod{?}$$

13. Sea $f(x) = x^3 + Ax + B \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible y $\theta \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $f(\theta) = 0$. Demostrar

$$\Delta[1, \theta, \theta^2] = -(4A^3 + 27B^2).$$

14. Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \in \mathbb{Q}[x]$ y $\theta \in \overline{\mathbb{Q}}$ tal que $f(\theta) = 0$. Calcular $\Delta[1, \theta, \theta^2]$ en función de A, B, C.

15. Calcular la estructura y generadores del grupo de clase del cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{-105})$.

16. Calcular la estructura y generadores del grupo de clase del cuerpo cuadrático $\mathbb{Q}(\sqrt{-546})$.

17. Conjeturar todas los posibles grupos de clase (salvo isomorfismo) de cuerpos cuadráticos. Da ejemplos de cada caso (¡Utilizar `Sage`!).

18. Sea $\theta = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ y $K = \mathbb{Q}(\theta)$. Asumiendo que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$, calcular el grupo de clase de K.

19. Sea p un primo impar tal que $\left(\frac{-23}{p}\right) = 1$. Entonces p o $2p$ es de la forma $x^2 + xy + 6y^2$ para ciertos $x, y \in \mathbb{Z}$.

20. Sea k un entero positivo libre de cuadrados tal que:

- $k \equiv 1$ o 2 módulo 4,
- $k = 3t^2 + 1$, $t \in \mathbb{Z}$,
- $3 \nmid h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-k})}$

Encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación de Mordell: $y^2 + k = x^3$.