

Utilizando las funciones ya implementadas en SAGE realizar los siguientes cálculos.

- (1) Para $\alpha \in \left\{ \sqrt{3}, \sqrt{5}, e^{\frac{2\pi i}{23}}, \sqrt{17} + \sqrt{19}, \frac{1+\sqrt{17}}{2\sqrt{-19}}, \sqrt{1+\sqrt{2}} + \sqrt{1-\sqrt{2}} \right\}$ construir en SAGE el cuerpo de números $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Para cada uno de los cuerpos de números anteriores calcular en SAGE:
- Grado de K .
 - Anillo de enteros \mathcal{O}_K .
 - Una base entera de K .
 - Discriminante de K .
 - Inmersiones de K en $\overline{\mathbb{Q}}$.
 - Unidades de \mathcal{O}_K .
 - Grupo de clase de K .
 - Número de clase de K .
 - Factorizar los ideales $\langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 5 \rangle$ dentro del anillo de enteros de K .
- (2) Sea $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ donde $\zeta = e^{2\pi i/5}$.
- Demostrar con SAGE que $\mathbb{Z}[\zeta]$ tiene un número infinito de unidades.
 - Calcular $N_K(\alpha)$ y $\text{Tr}_K(\alpha)$ para $\alpha = \zeta + 2, \zeta - 2, \zeta + 3, \zeta - 3, \zeta + 4, \zeta^2, \zeta + \zeta^2, 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4$.
 - Demostrar con SAGE que $\zeta + 2, \zeta - 2, \zeta + 3$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[\zeta]$.
 - Demostrar con SAGE que todos los divisores propios de $\zeta + 4$ tienen norma 5 ó 41, y, sabiendo que $\zeta - 1$ es un factor de $\zeta + 4$, encontrar en SAGE otro.
- (3) Excluyendo el intercambio de números, demostrar con SAGE que 1729 es el menor entero positivo que se puede escribir como suma de dos cubos positivos de dos maneras distintas. ¿Cuál es el menor entero positivo que se puede escribir como suma de potencias n -ésimas positivos para $n = 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$?
- (4) Sea $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$, p primo impar. Demostrar heurísticamente (para unos cuantos primos p) usando SAGE que $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ contiene a \sqrt{p} si $p \equiv 1 \pmod{4}$, y contiene a $\sqrt{-p}$ si $p \equiv 3 \pmod{4}$. Expresar $\sqrt{-3}$ y $\sqrt{5}$ como polinomios en el correspondiente ζ_p .
- (5) Utilizar las siguientes igualdades para demostrar con SAGE que los anillos de enteros de los correspondientes cuerpos cuadráticos no son D.F.U.:
- $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$,
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$: $6 = 2 \cdot 3 = \sqrt{-6}\sqrt{-6}$,
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{-10})$: $14 = 2 \cdot 7 = (2 + \sqrt{-10})(2 - \sqrt{-10})$,
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{-13})$: $14 = 2 \cdot 7 = (1 + \sqrt{-13})(1 - \sqrt{-13})$,
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{-14})$: $15 = 3 \cdot 5 = (1 + \sqrt{-14})(1 - \sqrt{-14})$,
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$: $4 = 2 \cdot 2 = \left(\frac{1+\sqrt{-15}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{-15}}{2}\right)$,
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{-17})$: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-17})(1 - \sqrt{-17})$,
 - $\mathbb{Q}(\sqrt{-21})$: $22 = 2 \cdot 11 = (1 + \sqrt{-21})(1 - \sqrt{-21})$.
- (6) Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ y $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$. Definimos los ideales
- $$\mathfrak{p} = \langle 2, 1 + \sqrt{-5} \rangle, \quad \mathfrak{q} = \langle 3, 1 + \sqrt{-5} \rangle, \quad \mathfrak{r} = \langle 3, 1 - \sqrt{-5} \rangle.$$
- Demostrar con SAGE que son ideales primos.

(b) Demostrar con SAGE

$$\mathfrak{p}^2 = \langle 2 \rangle, \quad \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r} = \langle 3 \rangle, \quad \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} = \langle 1 + \sqrt{-5} \rangle, \quad \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{r} = \langle 1 - \sqrt{-5} \rangle, \quad \mathfrak{p}^2 \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r} = \langle 6 \rangle.$$

(c) Calcular en SAGE las normas de los ideales \mathfrak{p} , \mathfrak{q} y \mathfrak{r} .

(d) Demostrar con SAGE que \mathfrak{p} , \mathfrak{q} y \mathfrak{r} no son principales.

(e) Demostrar con SAGE que los ideales $\langle 2 \rangle$ y $\langle 3 \rangle$ están generados por elementos irreducibles pero que los ideales no son primos.

(f) Encontrar en SAGE todos los ideales de \mathcal{O} que contienen el elemento 6.

(g) Demostrar en SAGE que en el grupo de clase \mathcal{H}_K se tiene:

$$[\mathfrak{p}]^2 = [\mathcal{O}], \quad [\mathfrak{p}][\mathfrak{q}] = [\mathcal{O}], \quad [\mathfrak{p}][\mathfrak{r}] = [\mathcal{O}].$$

(h) Demostrar en SAGE que el grupo de clase \mathcal{H}_K \mathfrak{p} , \mathfrak{q} y \mathfrak{r} son equivalentes.

(8) Encontrar en SAGE todos los ideales de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ con norma 18.

(9) Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-29})$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ y $\mathfrak{p} = \langle 2, 1 + \sqrt{-29} \rangle \subset \mathcal{O}$.

(a) Demostrar en SAGE que $1 - \sqrt{-29}, 30 \in \mathfrak{p}$ y que $30 \in \mathfrak{p}^2$.

(b) Calcular en SAGE la descomposición en ideales primos de los ideales $\langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 5 \rangle, \langle 1 + \sqrt{-29} \rangle$ y $\langle 1 - \sqrt{-29} \rangle$. Deducir la descomposición del ideal $\langle 30 \rangle$.

(c) Calcular en SAGE todos los ideales de \mathcal{O} conteniendo al elemento 30.

(10) Crear una función en SAGE que haga lo siguiente:

INPUT: d entero libre de cuadrados.

OUTPUT: $(\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}, h_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})})$.

– Crear una tabla en la que en la primera columna aparezca d , en la segunda la estructura de $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ y en la tercera $h_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$, para $|d| < 100$.